

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editors: J. Ackerst E. Baumann P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler
Redactor: R. Sängler

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

WASOW, W.: Discrete Approximations to Elliptic Differential Equations	81
BOTTEMA, O.: On the Stability of the Equilibrium of a Linear Mechanical System	97
DERFLER, H.: An Electromagnetic Difference-Equation of Importance in the Theory of Traveling-Wave Tubes	104
KURTH, R.: Gibt es eine statistische Mechanik der Sternsysteme?	115
SCHULTZE, E.: Die Erregung reiner Eigenschwingungen von Flugzeugflügeln. Eine Anwendung der Theorie der Integralgleichungen	126

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

MITRA, D.: On Stresses of an Isotropic Elastic Disc in the Form of a Cardioid Rotating Steadily in its Plane	136
KNAPPE, W.: Hydrodynamisches Modell zur Darstellung von Diffusionsvorgängen mit konzentrationsabhängigen Diffusionskoeffizienten	140

Varia - Miscellaneous - Divers

Eine Bemerkung zur Mitteilung von H. Wundt: «Über eine Funktionalgleichung aus der Wärmeleitung». Von M. Hosszu	143
Kleine Bemerkung zur asymptotischen Entwicklung des Fehlerintegrals. Von P. HENRICI	145
Internationales Symposium über elektrische Entladungen in Gasen	146
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques	147

ZAMP	Vol. VI	Fasc. 2	Pag. 81-152	25. 3. 55
------	---------	---------	-------------	-----------

Birkhäuser Verlag Basel, Schweiz

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängner, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurze Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzkosten* von Fr. 20.- pro Seite und von der 25. Seite an einen solchen von Fr. 35.- pro Seite zu entrichten. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the Editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution* of Fr. 20.- per page for pages 17-24, and of Fr. 35.- per page for pages 25 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution de Fr. 20.-* par page doit être payée pour les pages 17-24; à partir de page 25 la contribution est de Fr. 35.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 38.-, Ausland sFr. 48.-, Einzelnummer Fr. 10.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 38.-, foreign Fr. 48.-, single copy Fr. 10.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 38.-, étranger Fr. 48.-, le numéro Fr. 10.-

Postabonnement — Post-Office Subscription — Abonnement par office postal

Belgien, Luxemburg
Italien

Dänemark
Marokko

Deutschland
Norwegen

Finnland
Portugal

Holland
Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces: $\frac{1}{2}$ Seite/page: Fr. 165.-, $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr. 88.-, $\frac{1}{8}$ Seite/page: Fr. 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. — All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. — Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1955 by Birkhäuser Verlag, Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland

Discrete Approximations to Elliptic Differential Equations¹⁾

By WOLFGANG WASOW, Los Angeles, California²⁾

1. Introduction

There exist many methods for the numerical solution by finite difference methods of DIRICHLET's problem for linear second-order elliptic differential equations. Most of these use square grids and finite difference operators involving four or eight neighboring points at each net point. But rectangular, triangular, and hexagonal grids have also been employed [1], [2]³⁾. In more than two dimensions the number of grid systems that could be used, at least in principle, is even larger. The emphasis on simple geometric patterns is natural from a computational standpoint, but this simplicity is by necessity destroyed near the boundary C of the given domain B , unless B is a very special type of polyhedron. The various techniques proposed for interpolation near the boundary all amount to a modification of the regular grid in some manner that depends on the given domain [1], [2], [3], [4].

It is therefore desirable to develop the theory of such approximate solutions of DIRICHLET's problem in a way that is sufficiently general to contain most reasonable discrete schemes as special cases. The essential tool for such an investigation was developed by PETROWSKY in [5]. In fact, PETROWSKY's approach is so general it includes also certain approximation methods which are not based on a fixed system of discrete points, such as statistical sampling ('Monte Carlo') procedures using random walks that are not bound to the points of any grid.

PETROWSKY showed that his 'generalized Dirichlet problem' possesses a unique solution which approaches the solution of the ordinary Dirichlet problem, but he was not interested in the size of the error involved. We shall call this error—which is the generalization of what is commonly called 'truncation error'—the *discretization error*.

The first purpose of this paper is to study the discretization error in a manner that sheds some light on the comparative value of the various approximation

¹⁾ The preparation of this paper was sponsored (in part) by the Office of Naval Research, U.S.N.

²⁾ Institute for Numerical Analysis U.C.L.A., National Bureau of Standards.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 96.

schemes which have been proposed. This will be done by a generalization of a method first used by GERSCHGORIN [6] and later modified by COLLATZ [7].

In section 5, these results are applied to an investigation of RICHARDSON's scheme for the improvement of approximate solutions by means of a linear extrapolation from two results obtained with two different mesh lengths [8]. This method has proved its usefulness in numerous numerical applications [8], [9], [10], [11], but its validity in problems involving curved boundaries does not seem to have been investigated mathematically. It will be shown that, except for domains with very special boundaries, the benefit to be expected from the use of RICHARDSON's idea in the numerical solution of DIRICHLET's problem depends decisively on the interpolation formula employed near the boundary C .

2. The Integral Equation

Let x, y , etc. denote points of n -dimensional Euclidean space E . Then all discrete approximations to DIRICHLET's problem considered in this paper are special cases of the integral equation problem

$$U(x) = \begin{cases} \int_{\bar{B}} U(y) dF(y, x), & x \in B, \\ f(x), & x \in C. \end{cases} \quad (2.1)$$

Here and below the Stieltjes integral is formed with respect to the first variable in $F(y, x)$, and $\bar{B} = B + C$, C denoting the boundary of the bounded domain B . On $F(y, x)$ the following fundamental condition is imposed:

Condition I. $F(x, y)$ is a cumulative distribution function in \bar{B} , with respect to y . It is Lebesgue integrable in x and y combined for $x \in B, y \in \bar{B}$.

The function $f(x)$ is supposed to be bounded and Borel measurable.

This formulation is somewhat more special than that of PETROVSKY [5], who uses as kernels $F(y, x)$ distribution functions over the whole space E . For practical purposes this means that our theory does not include discrete approximation schemes to DIRICHLET's problem which involve points outside of \bar{B} . Also excluded are random walk (Monte Carlo) schemes in which the moving point can jump into $E - \bar{B}$. A more general formulation including these possibilities would introduce no serious new difficulties, but as it would make the arguments somewhat involved, we shall limit the discussion to (2.1).

The problem (2.1) contains as a special case all practically used finite difference approximations to elliptic differential equations of the form

$$L[u] \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad (2.2)$$

where x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) are the coordinates of x . If a term in u itself is present, then the theory of this paper would have to be modified by dropping the condition

$$\int_B dF(y, x) = 1.$$

If the coefficient of u is nowhere positive, this modification would be quite easy. It is, of course, possible to approximate equation (2. 2) by finite difference expressions whose coefficients vary in sign in such a way that condition I is not satisfied. But the convergence and stability of such approximations is doubtful, and they do not seem to have been used in practice. To any equation of the type (2. 2) a difference approximation satisfying condition I can be found. This result is contained in [12].

It should be noted that in the formulation (2. 1), the solution $U(x)$ is defined at all points x , even if the Stieltjes integral reduces to a sum of terms corresponding to regularly spaced net points. For instance, if LAPLACE's equation in two dimensions is approximated by the simplest finite difference expression the first equation in (2. 1) reads

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{4} U(x_1 + h, x_2) + \frac{1}{4} U(x_1 - h, x_2) + \frac{1}{4} U(x_1, x_2 + h) + \frac{1}{4} U(x_1, x_2 - h), \quad (2.3)$$

where x_1, x_2 are to be considered continuous variables. In other words, every point $x = (x_1, x_2)$ generates here a square net of which it is a net point.

In [5] PETROVSKY proved that problem (2. 1) possesses a unique bounded solution provided condition I and the hypothesis below are satisfied.

Condition II. Let

$$F_1(y, x) = F(y, x), \quad F_m(y, x) = \int_B F_{m-1}(y, z) dF(z, x), \quad m = 2, 3, \dots,$$

then there exists a positive integer m and a positive number $c < 1$, both independent of x , such that

$$\int_B dF_m(y, x) \leq c, \quad x \in B. \quad (2.4)$$

If $F(y, x)$ is interpreted as the transition probability of a random walk, then condition II means that a particle starting from x has a positive probability of leaving B on the m -th step (cf. [13]).

In the study of the discretization error in the next section we shall need a few results concerning the operator

$$\mathcal{L}[v] \equiv \int_{\bar{B}} v(y) dF(y, x) - v(x). \quad (2.5)$$

In writing $x \in B$, etc., below, we always mean 'for all x in B '.

LEMMA 1. (*Maximum Principle*). If condition I is satisfied, then

$$\mathcal{L}[v] = \int_B v(y) dF(y, x) - v(x) \neq \delta > 0, \quad x \in B_1 \subset \bar{B},$$

implies

$$\sup_{B_1} v(x) < \sup_{\bar{B} - B_1} v(x).$$

Proof. If the last inequality were not true we would have, for all x in B_1 ,

$$v(x) \leq \sup_{B_1} v(x) \int_{B_1} dF(y, x) + \sup_{\bar{B} - B_1} v(x) \int_{\bar{B} - B_1} dF(y, x) - \delta \leq \sup_{B_1} v(x) - \delta,$$

which is a contradiction.

LEMMA 2. Let $F(y, x)$ satisfy condition I, and let K_1 be a constant such that

$$|\mathcal{L}[v]| \leq K_1, \quad \text{for } x \in B_1 \subset \bar{B}. \quad (2.6)$$

If $q(x)$ is a nonnegative function in \bar{B} such that

$$\mathcal{L}[q] \leq -1, \quad x \in B_1, \quad (2.7)$$

then

$$\sup_{B_1} |v(x)| \leq K_1 \sup_{\bar{B}} q(x) + \sup_{\bar{B} - B_1} |v(x)|. \quad (2.8)$$

Proof. Let $K_1^* > K_1$. From (2.6) and (2.7) it follows that

$$\mathcal{L}[\pm v - K_1^* q] \geq K_1^* - K_1 > 0,$$

and therefore, by Lemma 1,

$$\sup_{B_1} (\pm v - K_1^* q) < \sup_{\bar{B} - B_1} (\pm v - K_1^* q) \leq \sup_{\bar{B} - B_1} |v|.$$

Hence,

$$\sup_{B_1} |v| \leq \sup_{\bar{B} - B_1} |v| + K_1^* \sup_{B_1} q,$$

and (2.8) is obtained from this by letting K_1^* tend to K_1 .

LEMMA 3. *If in addition to the assumptions of Lemma 2 the three conditions*

$$|\mathcal{L}[v]| \leq K_2, \quad x \in B - B_1, \quad (2.9)$$

$$v(x) = 0, \quad x \in C, \quad (2.10)$$

$$\int_B dF(y, x) \leq k < 1, \quad x \in B - B_1 \quad (2.11)$$

are satisfied, then

$$|v(x)| \leq \frac{1}{1-k} (K_1 \sup_B q(x) + K_2). \quad (2.12)$$

Proof. The inequality (2.9) implies that

$$|v(x)| \leq \int_B |v(y)| dF(y, x) + K_2, \quad x \in B - B_1.$$

Depending on whether $|v(x)|$ is larger in B_1 or in $B - B_1$, application of (2.10) and (2.11) to this inequality leads to

$$\sup_{\bar{B} - B_1} |v(x)| \leq k \sup_{B_1} |v(x)| + K_2 \quad (2.13a)$$

or

$$\sup_{\bar{B} - B_1} |v(x)| \leq k \sup_{\bar{B} - B_1} |v(x)| + K_2. \quad (2.13b)$$

The inequality (2.8) and, on the other hand, (2.13a) or (2.13b) constitute in each case a pair of simultaneous inequalities for $\sup_{B_1} |v(x)|$ and $\sup_{\bar{B} - B_1} |v(x)|$, which can easily be solved. We omit these short calculations, which in each case lead to inequalities that imply (2.12).

3. Bounds for the Discretization Error

Let u be the solution of the problem

$$\left. \begin{aligned} L[u] &\equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(\bar{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad x \in B, \\ u &= f(x), \quad x \in C. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

It is assumed that the domain B and the boundary function $f(x)$ are such that this problem possesses a unique solution. The difference

$$w = U - u, \quad (3.2)$$

where U is the solution of problem (2. 1), satisfies the integral equation problem

$$w(x) = \int_B w(y) dF(y, x) + g(x), \quad x \in B; \quad w(x) = 0, \quad x \in C, \quad (3.3)$$

$$g(x) = \int_B u(y) dF(y, x) - u(x). \quad (3.4)$$

From lemmas 2 and 3 of the preceding section we know that the discretization error $w(x)$ is small, under suitable assumptions on $F(y, x)$, provided $g(x)$ is small. Our problem is then to find functions $F(y, x)$ which make (3. 4) small. In all applications $F(y, x)$ is considered to belong to a family $F(y, x; \mu)$ of kernels chosen in such a way that $g(x)$ tends to zero as $\mu \rightarrow 0$.

It is quite easy to find functions $F(y, x; \mu)$ such that $g(x)$ is as small as we please in any fixed closed subdomain B_1 of B . For instance, if $L[u] \equiv \Delta u$, we may take as $F(y, x; \mu)$ a kernel for which, in B_1 ,

$$\int_B v(y) dF(y, x; \mu)$$

is the mean value of $v(x)$ on the n -dimensional sphere of radius μ about x as center. Since $u(x)$ is harmonic in B , the two terms in the right member of (3. 4) will then cancel for $x \in B_1$, provided μ has been taken small enough [cf. section 4e)]. Hence $g(x) = 0$, for $x \in B_1$. This example illustrates the fact that the main difficulty of our problem resides in a narrow strip near the boundary C of B .

Accordingly, we divide B into two disjoint subregions, $B = B_1 + B_2$, such that different properties of $F(y, x; \mu)$ are required, depending on whether $x \in B_1$ or $x \in B_2$. The domain B_1 is bounded away from C . The assumptions which we introduce now are devised so as to apply at least to all those actually proposed finite difference techniques which use interpolation rather than extrapolation at the boundary.

Let

$$u(y) = P(y, x) + \frac{1}{p!} \left[\sum_{j=1}^n (y_j - x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right]^p u(\bar{x}), \quad x, y \in \bar{B}, \quad (3.5)$$

be TAYLOR'S expansion, to terms of degree $p - 1$, of $u(y)$ about the point x . The function $P(y, x)$ is a polynomial in y_j ($j = 1, 2, \dots, n$), of degree $p - 1$ at most, for all $x \in B$. Also,

$$P(x, x) = u(x). \quad (3.6)$$

The symbol \bar{x} is to be treated as a variable in performing the indicated differentiations and then to be replaced by a certain point on the segment joining y and x .

Condition III. (a) *There exists an integer $p > 2$ such that for the solution $u(x)$ of problem (3. 1) the corresponding function $P(y, x)$ defined in (3. 5) satisfies the integral equation*

$$P(x, x) - \int_{\bar{B}} P(y, x) dF(y, x; \mu) = 0, \quad x \in B_1.$$

(b) *There exist constants M and $\alpha > 1$ such that*

$$\frac{1}{p!} \int_{\bar{B}} \left(\sum_{j=1}^n |y_j - x_j| \right)^p dF(y, x; \mu) \leq M \mu^\alpha, \quad x \in B_1.$$

Condition IV. For $x \in B_2$ a statement similar to that in condition III is true with the constants p, M, α replaced by q, N, β . Of q and β only the inequalities $q > 0, \beta > 0$ are required.

In practical applications the kernel $F(y, x; \mu)$ is defined in such a way that the preceding conditions are satisfied for *all* solutions of $L[u] = 0$ defined in \bar{B} . If, in particular, $L[u] \equiv \Delta u$ the conditions are usually satisfied if $P(y, x)$ is any harmonic polynomial of degree $p - 1$ in the y_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

The next condition is regrettably restrictive, but it is essential for our method, and has been used in all previous work along these lines ([1], [2], [6], etc.). The condition can probably be relaxed, if entirely different methods are used, but the necessary arguments might be rather difficult. [See, e.g., [14] for a somewhat related problem.)

Condition V. The p -th and the q -th derivatives of the solution $u(x)$ of problem (3. 1) are bounded in \bar{B} .

On the basis of these assumptions we immediately obtain bounds for the function $g(x)$ of (3. 4). Let A_r be a bound for the numerical values of all r -th partial derivatives of $u(x)$ in \bar{B} . Then (3. 4), (3. 5), and (3. 6) imply

$$|g(x)| \leq \begin{cases} M A_p \mu^\alpha, & x \in B_1, \\ N A_q \mu^\beta, & x \in B_2. \end{cases} \quad (3.7)$$

In order to apply lemma 3 to the integral equation (3. 3) for the discretization error, we need two more assumptions.

Condition VI.

$$\int_{\bar{B}} dF(y, x; \mu) \leq k < 1, \quad x \in B_2,$$

where k is independent of μ .

Condition VII. There exists a function $Q(x)$, nonnegative in \bar{B} , such that

$$\mathcal{L}[Q] \leq -\mu, \quad x \in B_1. \quad (3.8)$$

$Q(x)$ may depend on μ , but must be bounded as $\mu \rightarrow 0$.

We shall not attempt here a general discussion of the existence and construction of such functions $Q(x)$. If the conditions of PETROWSKY [5] are satisfied, which is the case in all applications known to the author, the existence of a nonnegative bounded function satisfying (3.8) with the equality sign was proved in [15]. This function is the μ -fold of the mean duration of a random walk in B with transition probability $F(y, x; \mu)$. If the operator \mathfrak{L} approximates LAPLACE's operator, as $\mu \rightarrow 0$, then, as was proved in [15], this particular choice of $Q(x)$ satisfies the inequality

$$|Q(x)| \leq \pi^{-1} V^{2/n} \left(\frac{n+2}{2} \right) V^{2/n} [1 + \varepsilon(\mu)], \quad (3.9)$$

where V is the volume of B and n the dimension. The function $\varepsilon(\mu)$ tends to zero with μ . An explicit construction of a function $Q(x)$ satisfying (3.8) and the other requirements of condition VII can be found in [1], provided $\mathfrak{L}[Q]$ belongs to a special but important class of difference operators in a square net in two dimensions. If this operator approximates LAPLACE's operator, then the corresponding function $Q(x)$ is numerically not greater than the square of the radius of the circle circumscribed about B . This bound is larger than the leading term of (3.9), but it is valid for all μ . See also [19].

We now apply lemma 3 to the discretization error $w(x)$. Thanks to (3.3), (3.4), and (3.7) and the conditions imposed, all hypotheses of this lemma are satisfied. In particular, $q(x) = \mu^{-1} Q(x)$. Hence we have proved

THEOREM 1. *If conditions I to VII are satisfied, the discretization error $w(x)$ of the generalized Dirichlet problem (2.1) satisfies the inequality*

$$|w(x)| \leq \frac{1}{1-k} \left(M A_p \mu^{\alpha-1} \sup_B Q(x) + N A_q \mu^\beta \right).$$

If no details are known about the relative sizes of M , N , A_p , A_q , it appears sensible, in most applications, to use functions $F(y, x; \mu)$ for which $\alpha - 1 = \beta$. There is not much point in using, as is sometimes proposed, a very accurate approximation in B_1 unless it is matched by an equally accurate interpolation scheme near the boundary.

The usefulness of theorem 1 is limited by the fact that $u(x)$ is not known. This drawback is shared by the work of GERSCHGORIN and of COLLATZ of which it is a natural extension. In spite of interesting results by ROSENBLOOM [16], WALSH and YOUNG [17], [18], and others, no really practical appraisal in terms of the data alone seems to exist, except for very special regions.

4. Examples

It is not the purpose of this section to add to the approximation schemes suggested in the literature. The examples below are all quite wellknown. They

are inserted here in order to illustrate the preceding theory, and also as a preparation for section 5. In all of them $n = 2$, and $L(u) = \Delta u$.

(a) GERSCHGORIN [6]. Let B_1 consist of all points x such that the four points $(x_1 \pm h, x_2)$, $(x_1, x_2 \pm h)$ are in B . For $x \in B_1$ we define $F(y, x)$ by

$$\int_B U(y) dF(y, x) = \frac{1}{4} \left[U(x_1 + h, x_2) + U(x_1 - h, x_2) + U(x_1, x_2 + h) + U(x_1, x_2 - h) \right], \quad x \in B_1. \quad (4.1)$$

For $x \in B_2 = B - B_1$ let $\xi(x)$ be one of the points of C nearest to x and define

$$\int_B U(y) dF(y, x) \equiv U(\xi), \quad x \in B_2;$$

then assumptions I to VII are satisfied, with

$$\mu = h^2, \quad p = 4, \quad M = \frac{1}{24}, \quad \alpha = 2, \quad q = 1, \quad N = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad k = 0.$$

The inequality of theorem 1 becomes

$$|w| \leq \frac{1}{24} A_4 h^2 \max_B Q(x) + A_1 h.$$

(b) COLLATZ [7]. The only change from GERSCHGORIN's scheme concerns the definition of $F(y, x)$ in B_2 . If $x \in B_2$ then at least one of its four 'neighbors' $(x_1 \pm h_1, x_2)$, $(x_1, x_2 \pm h)$ lies in $E - B$. On the segment joining one such point to x let $x^1 = x^1(x)$ be a point of C having a distance $h_1 < h$ from x . If this segment is extended by a distance $h_2 \leq h$ beyond x a point x^2 is reached, which is either the first intersection with C on this side or the nearest net point of the lattice, whichever comes first. Then $F(y, x)$ is defined in B_2 by

$$\int_B U(y) dF(y, x) = \frac{h_1 U(x^2) + h_2 U(x_1)}{h_2 + h_1}, \quad x \in B_2. \quad (4.2)$$

In other words, we use linear interpolation between x , x^1 and x^2 . Here we have

$$q = 2, \quad N = 1, \quad \beta = 1, \quad k = \frac{1}{2}.$$

Hence

$$|w| \leq \left(\frac{1}{12} A_4 \max_B Q(x) + 2 A_2 \right) h^2.$$

(c) Mikeladze [3]. Again only the definition of $F(y, x)$ in B_2 is modified. Consider, as before, the four lattice 'neighbors' of x . A neighbor which lies outside is to be replaced by a point of C on the segment joining it to x . Thus

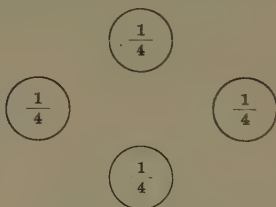
four points x^j ($j = 1, 2, 3, 4$) with respective distances h_j from x are obtained. Let the numbering be done counterclockwise. Then we define

$$\int_{\bar{B}} U(y) dF(y, x) = \left(\frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2 h_4} \right)^{-1} \left[\frac{U(x^1)}{h_1(h_1 + h_3)} + \frac{U(x^2)}{h_2(h_2 + h_4)} + \frac{U(x^3)}{h_3(h_3 + h_1)} + \frac{U(x^4)}{h_4(h_4 + h_2)} \right], \quad x \in B_2, \quad (4.3)$$

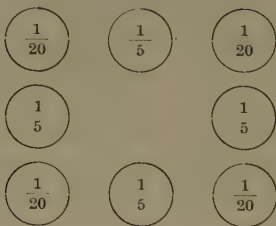
and find

$$q = 3, \quad N = \frac{1}{6}, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad k = \frac{3}{4}, \quad |w| \leq \frac{1}{6} A_4 \max_{\bar{B}} Q(x) h^2 + \frac{2}{3} A_3 h^3.$$

(d) BICKLEY [20], MIKELADZE [21], MILNE [2], etc. The 'weights' defining the step function $F(y, x)$ in B_1 in the previous examples can be illustrated, in a self-explanatory manner, by the symbolic pattern



(sometimes called a 'stencil'). The stencil



defines, in analogous fashion, a function $F(y, x; \mu)$ in B_1 for which

$$\mu = \frac{6}{5} h^2, \quad p = 8, \quad \alpha = 4, \quad M = 0.000622.$$

The definition of B_1 has to be changed now so that it contains only those points of B for which all eight neighbors of the stencil above lie in \bar{B} . The use of this complicated $F(y, x)$ in B_1 is justified only, if it is coupled with a definition of $F(y, x)$ in B_2 which contributes a similarly small error term. Such definitions can be given in many ways, but they always involve considerable numerical work (see [2], page 150).

(e) In B_1 let

$$\int_{\bar{B}} U(y) dF(y, x; \mu) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_{K_\mu} U(s) ds,$$

where K_μ is a circle of radius μ about x . This choice of the function $F(y, x; \mu)$ was mentioned in section 2. Here B_1 is to be defined as the subdomain of B whose points have distance greater than μ from C . The first right-hand term in (2.21) can here be replaced by zero. But since any definition of $F(y, x; \mu)$ in B_2 which gives good accuracy near the boundary is necessarily complicated, the advantages of this kernel for Monte Carlo or other numerical procedures are probably illusory.

5. L. F. Richardson's Extrapolation Procedure

Let $U(x, \mu)$ be an approximate solution of a problem whose true solution is $u(x) = U(x, 0)$. If $U(x, \mu)$ is differentiable with respect to μ at $\mu = 0$, i.e., if

$$U(x, \mu) = u(x) + u_1(x)\mu + o(\mu), \quad (5.1)$$

then a knowledge of two approximations

$$U(x, \mu_1), \quad U(x, \mu_2) \quad \text{with} \quad \mu_2 = \theta \mu_1, \quad 0 < \theta < 1 \quad (5.2)$$

can be used to construct the approximation

$$\frac{U(x, \mu_2) - \theta U(x, \mu_1)}{1 - \theta} = u(x) + o(\mu), \quad (5.3)$$

which is an improvement, as far as the order of magnitude of the error is concerned.

RICHARDSON, in [8], recommended this procedure for use in connection with the solution of differential equations by finite difference methods. It does, indeed, lead frequently to striking improvements of the numerical results (see [8] and [11]). All these successful applications of the extrapolation are, however, concerned with problems in domains so simple that the problem of interpolation of the boundary values does not occur. The domains in question are almost always intervals or rectangles.

In order to understand the decisive role of the boundary in this problem let us analyze in detail two extremely simple illustrative examples.

Example 1. Consider the technique described in section 4, example (a), in the one-dimensional case. Let B be the interval $|x| < 1$, and let the prescribed boundary values be $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$. The differential equation problem

$$u'' = 0, \quad |x| < 1, \quad u(-1) = -1, \quad u(1) = 1 \quad (5.4)$$

has the obvious solution $u(x) = x$. The corresponding finite difference problem is here

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} U(x+h) + \frac{1}{2} U(x-h) - U(x) &= 0, \quad |x| \leq 1-h, \\ U(x) &= 1, \quad 1-h < x \leq 1; \quad U(x) = -1, \quad -1 < x < -1+h. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

This formulation is the one used in our preceding general theory, but it is more complicated than is necessary in this simple example. The natural procedure here is to consider, from the outset, only values of h , for which $1/h$ is an integer. In this case x could be limited to points of grids symmetric to the origin and having net points at ± 1 . But let us assume, for purposes of illustration, that the grid chosen, although symmetric to $x = 0$, has a net point at $1 - \delta$, with $0 < \delta < h$. Then the corresponding solution of (5.5) has the value

$$U(x) \equiv U(x, h) = \frac{x}{1-\delta} = x + \frac{\delta}{h} x h + O(h^2) \quad (5.6)$$

at the points of this grid.

Now apply the extrapolation technique to this solution, setting successively $h = h_1$ and $h = h_2 = \theta d_1$ with corresponding values $\delta = \delta_1$, $\delta = \delta_2$. If h_1 and h_2 are chosen so that the same point x is a net point of both grids, formula (5.6) is valid in either case, and we obtain

$$\frac{U(x, h_2) - \theta U(x, h_1)}{1 - \theta} = x + \left(\frac{\delta_2}{h_2} - \frac{\delta_1}{h_1} \right) x h_2 + O(h_1^2).$$

Thus, the order of magnitude of the error is not changed by the extrapolation. In fact, for many choices of h_1 and h_2 the error will even have been increased.

We mention, incidentally, that the explicit solution of problem (5.5), for all x and h is

$$U(x) \equiv U(x, h) = \frac{[1 + x/h] - [1 - x/h]}{[1 + x/h] + [1 - x/h]},$$

where $[z]$ denotes the integral part of z . This expression can be used for a more detailed study of the error term.

In domains in more than one dimension with curved or irregular polygonal boundaries some interpolation of the boundary values is unavoidable, and the preceding example forces us to the conclusion that *there is no benefit in the extrapolation technique, if the treatment of the boundary is no better than in example (a) of section 4.*

The same statement can be made with regard to the improved boundary treatment in example (b), section 4. This cannot be illustrated by the example (5.4), since the discretization error is strictly zero in this case. Since two-dimensional counter-examples would be too involved for explicit treatment, we choose again

a one-dimensional problem, which, although it is no longer a special case of problem (3. 1), illustrates well the situation that must be expected in general. The boundary difficulties are the same as those encountered with problem (3. 1) in more than one dimension.

Example 2. We set, for abbreviation

$$\sinh 1 = a, \quad \cosh 1 = b.$$

Together with the continuous problem

$$u'' - u = 0, \quad |x| \leq 1, \quad u(1) = \frac{1}{a}, \quad u(-1) = -\frac{1}{a}, \quad (5.7)$$

we consider the discrete problem

$$\frac{1}{2} U(x+h) + \frac{1}{2} U(x-h) - U(x) - \frac{h^2}{2} U(x) = 0, \quad |x| \leq 1-h, \quad (5.8a)$$

$$\frac{h_1}{h_1+h} U(x-h) + \frac{h}{h_1+h} \cdot \frac{1}{a} - U(x) = 0, \quad 1-h < x \leq 1, \quad (5.8b)$$

$$\frac{h_2}{h_2+h} U(x+h) - \frac{h}{h_2+h} \cdot \frac{1}{a} - U(x) = 0, \quad -1 \leq x < -1+h. \quad (5.8c)$$

Here $1-h_1$ and h_2-1 are the right and left end points of the largest interval that can be fitted into $|x| \leq 1$ so that x as well as those end points are grid points of a net of mesh length h .

In analogy with example 1 we restrict ourselves to a special grid, symmetric to the origin, with a net point at $x = 1-\delta$, $\delta < h$. Because of the antisymmetry of the discrete problem and the symmetry of this grid,

$$U(x) = -U(-x)$$

for points x of the grid. All solution of (5. 8a) with this property are of the form

$$U(x) = c \sinh p x, \quad |x| \leq 1-\delta, \quad (5.9)$$

where

$$\cosh p h = 1 + \frac{h^2}{2}. \quad (5.10)$$

We now determine the constant c in (5. 9) in such a way that (5. 8b) is satisfied for the grid points in $1-h < x \leq 1$, i.e., for the one point $1-\delta$. For reasons of symmetry (5. 8c) is then automatically satisfied. With the notation

$$\gamma = \frac{\delta}{h}$$

the value of c turns out to be

$$c = \frac{1}{a} \{ (1+\gamma) \sinh p (1-\gamma h) - \gamma \sinh p [1-(\gamma+1)h] \}^{-1}. \quad (5.11)$$

As (5. 10) implies

$$\phi = 1 - \frac{h^2}{24} + O(h^4), \quad (5.12)$$

we find from (5. 11) and (5. 12), after a short calculation,

$$c = 1 + \left[\frac{\gamma b}{24 a} + \frac{1}{2} \gamma (1 + \gamma) \right] h^2 + O(h^4). \quad (5.13)$$

Insertion of (5. 12) and (5. 13) into (5. 9) followed by an expansion in powers of h^2 leads to

$$U(x) = \sinh x + [A(x) + B(x, h)] h^2 + O(h^4), \quad (5.14)$$

where

$$A(x) = \frac{x}{24} (\sinh x - \cosh x), \quad B(x, h) = \left(\frac{\gamma b}{24 a} + \frac{1}{2} (1 + \gamma) \gamma \right) \sinh x.$$

The first right-hand term in (5. 14) is, of course, the solution of problem (5. 7). If $x \neq 0$, the quantity $B(x, h)$ in the first error term is a discontinuous function of h without limit as $h \rightarrow 0$ because of the presence of the 'sawtooth' expression γ . It follows, exactly as in example 1, that no improvement can be expected from RICHARDSON'S extrapolation.

If the interpolation at the boundary is made more accurate than COLLATZ'S method used in the preceding example, an affirmative statement can be made concerning RICHARDSON'S extrapolation scheme.

THEOREM. *Let B be a two-dimensional bounded domain with boundary C , and let $u(x)$, $u_1(x)$ be the solutions of the problem*

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } B, \quad u = f \text{ on } C, \\ \Delta u_1 &= -\frac{1}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right) \text{ in } B, \quad u = 0 \text{ on } C, \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

respectively. Assume that u and u_1 possess bounded sixth and fourth derivatives, respectively, in B . Denote by $U(x)$ the solution of the finite difference problem (2. 1), with $F(y, x)$ defined by (4. 1) in B_1 and by (4. 3) in B_2 . Then

$$U(x) = u(x) + u_1(x) h^2 + w_1(x, h) h^3, \quad (5.16)$$

where $w_1(x, h)$ is uniformly bounded in B , as $h \rightarrow 0$.

Proof. Insertion of (5. 16) into (2. 1) leads to

$$w_1(x, h) = \int_B w_1(y, h) dF(y, x) + G(x, h) \quad (5.17)$$

with

$$\left. \begin{aligned} G(x, h) &= h^{-3} \left[\int_{\bar{B}} u(y) dF(y, x) - u(x) \right] \\ &+ h^{-1} \left[\int_{\bar{B}} u_1(y) dF(y, x) - u_1(x) \right] = h^{-3} \mathcal{L}[u] + h^{-1} \mathcal{L}[u_1]. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

With our choice of $F(y, x)$ this becomes, for $x \in B_1$,

$$G(x, h) = \frac{h}{48} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right) + \frac{h}{4} \Delta u_1 + O(h^3) = O(h^3), \quad x \in B_1, \quad (5.19)$$

because of (5. 15).

For $x \in B_2$ it follows from (4. 3) and $\Delta u = 0$ that

$$\mathcal{L}[u] = O(h^3), \quad x \in B_2.$$

We also see directly from (4. 3) that

$$\mathcal{L}[u_1] = O(h^2), \quad x \in B_2.$$

Insertion into (5. 18) produces

$$G(x, h) = O(1), \quad x \in B_2. \quad (5.20)$$

Thanks to (5. 19) and (5. 20) and the properties of $F(y, x)$ stated in section 4(c) the function $w_1(x, h)$ satisfies the assumptions of Lemma 3 in section 2, with K_1 and K_2 independent of h . It follows that $w_1(x, h)$ is indeed bounded as $h \rightarrow 0$.

The preceding proof shows also that the largest contribution to the third right-hand term of (5. 16) – at least in order of magnitude with respect to h – originates in the boundary strip B_2 .

It is clear that the technique used in the proof of theorem 2 could be applied to numerous problems: other differential equations and other discrete approximation schemes could be treated; if $u(x)$ has sufficiently many derivatives in \bar{B} and if $F(y, x; \mu)$ depends sufficiently smoothly on μ in B_2 , the formula (5. 16) could be replaced by an expansion to more terms. The author doubts, however, the numerical usefulness of such investigations.

Summarizing the meaning of theorem 2, we can state that the order of the error term in the solution of DIRICHLET's problem can be increased from $O(h^2)$ to $O(h^3)$ by an extrapolation using two values of h , provided the boundary interpolation described in 4(c) is used. Since this interpolation formula is fairly complicated, it is quite possible that *one* calculation using COLLATZ's scheme 4(b) and a smaller value of h will yield the same accuracy with less labor. This criticism does not apply to applications of RICHARDSON's extrapolation to problems on line segment or rectangles.

An extension of the methods of this paper to boundary-value problems of the second and third kind would be of interest. Some of the results of BATSCHELET in [22] go in this direction.

REFERENCES

- [1] L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen* (Springer-Verlag, Berlin, 1951).
- [2] W. E. MILNE, *Numerical Solution of Differential Equations* (John Wiley & Sons, New York, 1953).
- [2] SH. MIKELADZE, *Numerische Integration der Gleichungen vom elliptischen und parabolischen Typus*, Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Ser. Matem., 5, 57-74 (1941). (Russian, German summary.)
- [4] D. PANOV, *Numerical Solution of Partial Differential Equations* (Moscow, 1951) (Russian).
- [5] I. PETROWSKY, *Über das Irrfahrtproblem*, Math. Ann. 109, 425-444 (1934).
- [6] S. GERSCHGORIN, *Fehlerabschätzung für das Differenzverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen*, Z. angew. Math. Mech. 10, 373-382 (1930).
- [7] L. COLLATZ, *Bemerkungen zur Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren bei partiellen Differentialgleichungen*, Z. angew. Math. Mech. 13, 56-57 (1933).
- [8] L. F. RICHARDSON, *The Approximate Arithmetic Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, etc.*, Phil. Trans. [A] 210, 307-357 (1910).
- [9] L. F. RICHARDSON and J. A. GAUNT, *The Deferred Approach to the Limit*, Phil. Trans. Roy. Soc. London [A] 226, 299-361 (1927).
- [10] L. FOX, *The Numerical Solution of Elliptic Differential Equations when the Boundary Conditions Involve a Derivative*, Phil. Trans. Roy. Soc. London [A] 242, 345-378 (1950).
- [11] M. G. SALVADORI, *Extrapolation Formulas in Linear Difference Operators*, Proc. 1st Nat. Congress appl. Mech. 15-18 (New York, 1951).
- [12] TH. MOTZKIN and W. WASOW, *On the Approximation of linear Elliptic Differential Equations by Difference Equations with Positive Coefficients*, J. Math. Phys. 31, 253-259 (1953).
- [13] W. WASOW, *On the Duration of Random Walks*, Ann. Math. Stat. 22, 199-216 (1951).
- [14] G. E. FORSYTHE, *Asymptotic Lower Bounds for the Fundamental Frequency of Convex Membranes*. (To appear in the Pacific Journal of Mathematics.)
- [15] W. WASOW, *On the Mean Duration of Random Walks*, J. Res. Nat. Bur. Standards 46, 462-471 (1951).
- [16] P. C. ROSENBLOOM, *The Difference Equation method for Solving the Dirichlet Problem*, in 'Construction and Applications of Conformal Maps', Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser. 78, 231-237 (1952).
- [17] J. L. WALSH and D. YOUNG, *On the Accuracy of the Numerical Solution of the Dirichlet Problem by Finite Differences*, J. Res. Nat. Bur. Standards 51, 343-363 (1953).
- [18] J. L. WALSH and D. YOUNG, *On the Degree of Convergence of Solutions of Difference Equations to the Solution of the Dirichlet Problem*, J. Math. Phys. 33, 80-93 (1954).
- [19] J. H. CURTISS, *Sampling Methods Applied to Differential and Difference Equations*, in 'Seminar on Scientific Computation', I. B. M. Corp. (1949).

- [20] W. G. BICKLEY, *Finite Difference Formulae for the Square lattice*, Quart. J. Mech. appl. Math. 1, 35-42 (1948).
- [21] SCH. MIKELADZE, *Sur l'intégration numérique d'équations différentielles aux dérivées partielles*, Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., VIIth series, No. 6, 819-842 (1934). (Russian; French summary.)
- [22] E. BATSCHELET, *Über die numerische Auflösung von Randwertproblemen bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen*, Z. angew. Math. Phys. 3, 185 bis 193 (1952).

Zusammenfassung

Der Fehler, welcher entsteht, wenn man das erste Randwertproblem für lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit endlichen Differenzenmethoden löst, wird mittels einer Methode abgeschätzt, die so allgemein ist, dass sie fast alle in der Praxis auftretenden Netze und Interpolationstechniken an gekrümmten Rändern umfasst. Diese Abschätzung wird dann benützt, um die von L. F. RICHARDSON empfohlene Methode zur Verbesserung der Näherungslösung durch Extrapolation mathematisch zu analysieren.

(Received: April 22, 1954.)

On the Stability of the Equilibrium of a Linear Mechanical System

By OENE BOTTEMA, Delft¹⁾

1.

In some papers H. ZIEGLER²⁾ discussed the stability criteria for mechanical systems. In particular he drew attention to the fact that for *non-conservative* systems one has to be very careful with the application of other criteria than the kinetic one. Moreover dealing with such systems he encountered some phenomena which at first sight show a more or less paradox character. We mention for instance his discussion of a certain non-conservative system with two degrees of freedom, for which the condition of stability changes in a discontinuous way when we pass from the case in which the friction is very small to that where it is wholly neglected. In what follows we add some remarks to the problems in question. We consider *the general linear dynamical system with two degrees of freedom* and discuss stability under the conditions just mentioned, meeting *i. a.* ZIEGLER's result and answering the question when the said discontinuity exists. Moreover we state another theorem in the same field, which shows that the collaboration of a non-conservative force (a *circulatory*

¹⁾ Technische Hogeschool.

²⁾ H. ZIEGLER, *Stabilitätsprobleme bei geraden Stäben und Wellen*, ZAMP, 2, 265-289 (1951); *Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik*, Ingenieurarchiv 20, 49-56 (1952); *Linear Elastic Stability*, ZAMP, 4, 1-50 (1953).

force in ZIEGLER's terminology) and a gyroscopic force is fatal for stability: an equilibrium however strong it seems is ruined by such a combination, however small the participants may be. At last we prove that the same theorem holds for a system with three degrees of freedom but for certain exceptions.

2.

We consider a holonomic scleronomic linear system with two degrees of freedom, the coordinates x and y of which are chosen in such a way (which is always possible) that the kinetic energy is

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (1)$$

We confine ourselves to small displacements from the equilibrium configuration $x = y = 0$. Hence the Lagrange equations are as follows

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + a_{11}x + a_{12}y + b_{11}\dot{x} + b_{12}\dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + a_{21}x + a_{22}y + b_{21}\dot{x} + b_{22}\dot{y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

where a_{ij} and b_{ij} are constants. $\|a_{ij}\|$ is the matrix of the forces depending on the coordinates, $\|b_{ij}\|$ that of those depending on the velocities. If $\|a_{ij}\|$ is symmetrical, there exists a potential energy function

$$V = \frac{1}{2} (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)$$

if it is antisymmetrical, the forces are circulatory. When the matrix $\|b_{ij}\|$ is symmetrical, we have a non-gyroscopic damping force, which is positive when the dissipative function

$$\frac{1}{2} (b_{11}\dot{x}^2 + 2b_{12}\dot{x}\dot{y} + b_{22}\dot{y}^2)$$

is positive definite. If $\|b_{ij}\|$ is antisymmetrical the forces depending on the velocities are purely gyroscopic.

$\|a_{ij}\|$ and $\|b_{ij}\|$ can both be written uniquely as the sum of symmetrical and antisymmetrical parts:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{vmatrix},$$

where

$$a_{12}^* = a_{21}^* = \frac{1}{2} (a_{12} + a_{21}), \quad p = \frac{1}{2} (a_{12} - a_{21});$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}^* \\ b_{21}^* & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{vmatrix},$$

where

$$b_{12}^* = b_{21}^* = \frac{1}{2} (b_{12} + b_{21}), \quad \omega = \frac{1}{2} (b_{12} - b_{21}).$$

We can simplify our equations by a suitable transformation

$$x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi, \quad y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi,$$

which does not alter (1), leaves the type of equations (2) the same (only transforming the coefficients) and for which p and ω are invariant; we can choose φ in such a way that either a_{12}^* or b_{12}^* vanishes, reducing the potential energy or the dissipation function to a sum of squares.

We take the first of these possibilities and writing again x, y, b_{12}, \dots for x_1, y_1, b_{12}^* , etc. we get the following set of equations of motion:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + a_{11} x + p y + b_{11} \dot{x} + (b_{12} + \omega) \dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} - p x + a_{22} y + (b_{12} - \omega) \dot{x} + b_{22} \dot{y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

The system has a potential energy function when $p = 0$, it is purely circulatory for $a_{11} = a_{22} = 0$, it is non-gyrosopic for $\omega = 0$, and has no damping when $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$; if damping exists, we always suppose that it is positive.

3.

In order to solve the equations (3) we put $x = C_1 e^{\lambda t}$, $y = C_2 e^{\lambda t}$ and we obtain the following equation for the frequencies λ :

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + b_{11} \lambda + a_{11} & (b_{12} + \omega) \lambda + p \\ (b_{12} - \omega) \lambda - p & \lambda^2 + b_{22} \lambda + a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

or

$$c_0 \lambda^4 + c_1 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda + c_4 = 0,$$

where

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_1 &= b_{11} + b_{22}, \\ c_2 &= a_{11} + a_{22} + (b_{11} b_{12} - b_{12}^2) + \omega^2, \\ c_3 &= a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11} + 2 p \omega, \\ c_4 &= a_{11} a_{22} + p^2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

For the equilibrium to be stable all roots of (4) must have real parts which are ≤ 0 . For the latter condition it is necessary that $c_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

If $c_i > 0$, we have moreover the necessary and sufficient Routh-Hurwitz condition

$$c_2 > \frac{c_0 c_3^2 + c_4 c_1^2}{c_1 c_3}. \quad (6)$$

If $c_1 = c_3 = 0$ the equation has two pairs of opposite roots and the condition reads

$$c_2^2 > 4 c_0 c_4. \quad (7)$$

If, however, $c_1 = 0$, $c_3 \neq 0$, the sum of the roots is zero; it is therefore obvious that they cannot have all a non-positive real part unless they are all purely imaginary, but that is impossible in view of $c_3 \neq 0$.

That means: for $c_1 = 0$, $c_3 \neq 0$ the equilibrium is always unstable. (The same holds of course for $c_1 \neq 0$, $c_3 = 0$).

4.

We consider some special cases.

(i) Suppose that the field force is conservative ($p = 0$) and that there is no damping ($b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$). Then

$$c_1 = 0, \quad c_2 = a_{11} + a_{22} + \omega^2, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = a_{11} a_{22}$$

so that we must make use of (7). If for $\omega = 0$ the equilibrium is stable ($a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$) it remains stable when gyroscopic forces are added. If it has one unstable degree of freedom ($a_{11} < 0$, $a_{22} > 0$) it remains unstable under gyroscopic forces, because $c_4 < 0$. If both degrees of freedom are unstable ($a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$), the system can always be stabilized by a gyroscopic force, the condition being $|\omega| > \sqrt{-a_{11}} + \sqrt{-a_{22}}$.

All these results are special cases of wellknown theorems, concerning the stability of conservative systems with an arbitrary number of degrees of freedom¹⁾.

(ii) If the field force is conservative ($p = 0$) and if there are no gyroscopic forces ($\omega = 0$), then we have in the case of damping

$$c_1 = b_{11} + b_{22}, \quad c_2 = a_{11} + a_{22} + (b_{11} b_{22} - b_{12}^2), \quad c_3 = a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11}, \quad c_4 = a_{11} a_{22}.$$

Hence $c_1 \neq 0$, $c_3 \neq 0$ and supposing $a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11} > 0$ the inequality (6) reads:

$$(a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11}) (b_{11} + b_{22}) (b_{11} b_{22} - b_{12}^2) + b_{11} b_{22} (a_{11} - a_{22})^2 > 0.$$

¹⁾ W. THOMSON and P. G. TAIT, *A Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I, Part I (Cambridge, 1879), p. 370-415. - H. J. E. BETH, *On the Stabilization of Instable Equilibrium by Means of Gyroscopic Forces*, Phil. Mag. 49, 447-450 (1925).

That means that if the equilibrium is originally stable ($a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$), it remains stable when damping is present. If it is unstable, it cannot be stabilized by the damping forces; for if $a_{11} < 0$, $a_{22} > 0$, we have $c_4 < 0$, and if $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, we have $c_3 < 0$.

(iii) If we have the same condition $p = 0$ as in (ii), but gyroscopic forces as well ($\omega \neq 0$) the coefficients (5) do not change but for c_2 which increases. Hence stability or unstability are not affected by the gyroscopic force. If the system is originally stable ($a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$) the situation is not changed by gyroscopic and damping forces; if it is originally unstable, it may be stabilized by a gyroscopic force as seen in (i), but if a damping force is added, however small it may be, the equilibrium is again unstable¹).

(iv) We now suppose that the field forces are non-conservative ($p \neq 0$). If damping is absent ($b_{ij} = 0$), then

$$c_1 = 0, \quad c_2 = a_{11} + a_{22} + \omega^2, \quad c_3 = 2p\omega, \quad c_4 = a_{11}a_{22} + p^2.$$

We have seen above that for $c_1 = 0$, $c_3 \neq 0$ the equilibrium can never be stable. Therefore: *In a frictionless system there can be no stability if a non-conservative force and a gyroscopic force (however small they may be) are acting together².*

(v) Suppose that we have a non-conservative system ($p \neq 0$), with damping, but without gyroscopic forces. Then:

$$c_1 = b_{11} + b_{22}, \quad c_2 = a_{11} + a_{22} + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2),$$

$$c_3 = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11}, \quad c_4 = a_{11}a_{22} + p^2.$$

Assuming that $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ the condition for stability reads

$$(a_{11} - a_{22})^2 + \frac{(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(b_{11} + b_{22})}{b_{11}b_{22}} > p^2 \frac{(b_{11} + b_{22})^2}{b_{11}b_{22}}. \quad (8)$$

Suppose now that the damping force decreases in a uniform way, that means take $b_{11} = \varepsilon b'_{11}$, $b_{12} = \varepsilon b'_{12}$, $b_{22} = \varepsilon b'_{22}$, where b'_{11} , b'_{12} , b'_{22} are constants and $\varepsilon \rightarrow 0$. Then for the inequality (8) we get

$$(a_{11} - a_{22})^2 > g_1 \quad \text{with} \quad g_1 = \frac{(b'_{11} + b'_{22})^2}{b'_{11}b'_{22}} p^2. \quad (9)$$

But if there is no damping, we have to make use of condition (7), which gives

$$(a_{11} - a_{22})^2 > g_0 \quad \text{where} \quad g_0 = 4p^2. \quad (10)$$

¹) W. THOMSON and P. G. TAIT, l. c., p. 391: 'Gyroscopic forces cannot convert instability into stability if there is any dissipativity'.

²) If ω and p are both small, the real parts of the roots are $\pm \omega p / (a_{11} - a_{22})$ for $a_{11} \neq a_{22}$, and $\pm p / (2\sqrt{a_{11}})$ for $a_{11} = a_{22}$; in all cases there are roots with a positive real part.

Obviously

$$g_1 - g_0 = \frac{(b_{11} - b_{22})^2}{b_{11} b_{22}} p^2 \geq 0.$$

That means that in all cases where $b_{11} \neq b_{22}$ we have a discontinuity in our stability condition, such that the equilibrium may be stable if there is no damping, but unstable if there is damping, however small it may be.

This is the result which ZIEGLER found in a special case.

(vi) If the field is non-conservative and there is a gyroscopic force and a damping force as well, we have the general case. It is to be expected that here stable and unstable systems exist depending on the values of the parameters. This is confirmed by an example. Take

$$a_{11} = a_{22} = a > 0, \quad b_{11} = b_{22} = b, \quad b_{12} = 0.$$

Then we have

$$c_1 = 2b, \quad c_2 = 2a + b^2 + \omega^2, \quad c_3 = 2(ab + p\omega), \quad c_4 = a^2 + p^2.$$

Stability occurs when

$$c_3 = ab + p\omega > 0 \quad \text{and} \quad c_2 > \frac{c_0 c_3^2 + c_4 c_1^2}{c_1 c_3}$$

which taken together gives rise to the single condition

$$ab^2 + p\omega b - p^2 > 0.$$

As we have seen above there is no stability for $b = 0$; for small values of b there is no stability either, but if b is sufficiently large, the equilibrium is stable. The condition is

$$2ab > -p\omega + \sqrt{p^2(\omega^2 + 4a)},$$

which is remarkable in so far that it does not remain the same if we change one of the parameters p and ω into $-p$ or $-\omega$ respectively.

5.

In (iv) we stated that for a frictionless system of two degrees of freedom no stability is possible when there is a circulatory force and a gyroscopic force as well. We now ask whether this theorem also holds for a system with three degrees of freedom. If we take the kinetic energy and the potential energy of the conservative force as a sum of squares, then, using analogous notations as

above, we get the following frequency equation

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + b_{11}\lambda + a_1 & (b_{12} + \omega_3)\lambda + p_3 & (b_{13} - \omega_2)\lambda - p_2 \\ (b_{21} - \omega_3)\lambda - p_3 & \lambda^2 + b_{22}\lambda + a_2 & (b_{23} + \omega_1)\lambda + p_1 \\ (b_{31} + \omega_2)\lambda + p_2 & (b_{32} - \omega_1)\lambda - p_1 & \lambda^2 + b_{33}\lambda + a_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Here a_i are the components of the conservative force, p_i , ω_i and b_{ij} denote the circulatory, the gyroscopic and the damping forces respectively. If the latter is absent the equation reads

$$d_0 \lambda^6 + d_1 \lambda^5 + d_2 \lambda^4 + d_3 \lambda^3 + d_4 \lambda^2 + d_5 \lambda + d_6 = 0,$$

where

$$d_0 = 1,$$

$$d_1 = 0,$$

$$d_2 = a_1 + a_2 + a_3 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

$$d_3 = 2(p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 + p_3 \omega_3),$$

$$d_4 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2 + a_1 \omega_1^2 + a_2 \omega_2^2 + a_3 \omega_3^2,$$

$$d_5 = 2(a_1 p_1 \omega_1 + a_2 p_2 \omega_2 + a_3 p_3 \omega_3),$$

$$d_6 = a_1 a_2 a_3 + a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2 + a_3 p_3^2.$$

The sum of the roots is zero; therefore, if they all have non-positive real parts, only purely imaginary roots exist. This implies

$$d_3 \lambda^2 + d_5 = 0 \quad \text{and} \quad \lambda^6 + d_2 \lambda^4 + d_4 \lambda^2 + d_6 = 0,$$

hence

$$d_5^3 - d_2 d_3 d_5^2 + d_3^2 d_4 d_5 - d_3^3 d_6 = 0,$$

which is not an identity. Therefore the systems are in general not stable. There may be stable ones, but then the parameters must fulfil an equation (and not only inequalities). It is not difficult to construct an example where stability is ascertained. Take

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 2, \quad p_1 = p_3 = 2, \quad p_2 = -4, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 2,$$

then

$$d_2 = 24, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 116, \quad d_5 = 0, \quad d_6 = 144$$

and the equation is

$$(\lambda^2 + 2)(\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 18) = 0,$$

which has no roots with a positive real part.

Zusammenfassung

Anschliessend an die Zieglerschen Arbeiten wird das allgemeine lineare dynamische System mit zwei Freiheitsgraden in bezug auf seine Stabilität untersucht. Es werden dabei nichtkonservative Feldkräfte, lineare Dämpfung und gyroskopische Kräfte in Betracht gezogen. Die Anwendung des dynamischen Stabilitätskriteriums gibt einige Sätze, welche über die schon von THOMSON und TAIT herrührenden Resultate hinausgehen. Es zeigt sich, dass in einem nichtkonservativen System ohne Dämpfung bei Anwesenheit gyroskopischer Kräfte das Gleichgewicht niemals stabil sein kann. Dieser Satz gilt für Systeme mit drei Freiheitsgraden nicht ohne Ausnahmen. Ein von ZIEGLER gefundenes Ergebnis, wonach eine Diskontinuität in der Stabilitätsbedingung auftreten kann, wird allgemein diskutiert.

(Received: February 24, 1954.)

An Electromagnetic Difference-Equation of Importance in the Theory of Traveling-Wave Tubes

By HEINRICH DERFLER, Zürich¹⁾

§ 1. Introduction

It was shown [1, p. 23]²⁾ that the currents and voltages on a chain of identical three-terminal-pair junctions (Figure 1) are interconnected by the following difference equation:

$$\left. \begin{aligned} V(n+1) - 2 \operatorname{ch} \Gamma V(n) + V(n-1) &= Z \operatorname{sh} \Gamma I(n) \\ -W [I(n+1) - 2 \operatorname{ch} \Gamma I(n) + I(n-1)] & \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

The parameters Γ , Z , W can be expressed in terms of the impedance parameters of these junctions.

It will be shown in this paper that equation (1) holds even under more general conditions, including interactions over long distances such as they occur in traveling-wave-tube structures, provided the parameters Γ , Z , W are suitably redefined.

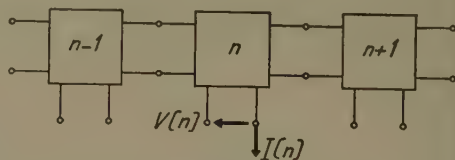


Figure 1

Chain of three-terminal-pair junctions.

¹⁾ Institut für Hochfrequenztechnik der ETH. Paper supported by a research fellowship of the Battelle Memorial Institute.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 114.

§ 2. The Representation of the Traveling-Wave Interaction by an Integral Equation

The motion of a cylindrical electron beam under small signal conditions leads, by the Maxwell-Lorentz-field theory, to the following integral-equation. [1, p. 17]:

$$H^{(a)}(Z) - H^{(i)}(Z) = H^{(e)}(Z), \quad (2)$$

where

$$\left. \begin{aligned} H^{(e)}(Z) &= \lim_{R \rightarrow A-0} [H_{\phi}(Z, R; \varepsilon^2) - H_{\phi}(Z, R; 0)] \\ &\cong \frac{i}{2} \frac{\beta}{\pi \zeta} \frac{\varepsilon^2}{A} \int_0^{\infty} dZ' E(Z - Z') \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \frac{\sin \varepsilon_k Z'}{\varepsilon_k} \exp(-i Z'), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} H^{(i)}(Z) &= \lim_{R \rightarrow A-0} H_{\phi}(Z, R; 0) \\ &= \frac{i}{2} \frac{\beta}{\pi \zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} dZ' E(Z') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{\nu} \cdot \frac{J_1(\nu A)}{J_0(\nu A)} \exp i \kappa(Z' - Z), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

and

$$H^{(a)}(Z) = \lim_{R \rightarrow A+0} H_{\phi}(Z, R; 0)$$

which may be expressed in a way similar to $H^{(i)}(Z)$.

Further

$$E(Z) = \lim_{R \rightarrow A \pm 0} E_Z(Z, R)$$

which is to be determined by equation (2).

We introduce the condition of periodicity setting

$$E(Z + L) = E(Z) \exp(-i \theta). \quad (5)$$

θ will be supposed to be real except when otherwise stated. It follows from (4) that:

$$\begin{aligned} H^{(i)}(Z) &= \frac{i}{2} \frac{\beta}{\pi \zeta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{nL-L/2}^{nL+L/2} dZ' E(Z') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{\nu} \cdot \frac{J_1(\nu A)}{J_0(\nu A)} \exp i \kappa(Z' - Z) \\ &= \frac{i}{2} \frac{\beta}{\pi \zeta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-L/2}^{+L/2} dZ' E(Z' + nL) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{\nu} \cdot \frac{J_1(\nu A)}{J_0(\nu A)} \exp i \kappa(Z' + nL - Z) \\ &= \frac{i}{2} \frac{\beta}{\pi \zeta} \int_{-L/2}^{+L/2} dZ' E(Z') \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(i n \theta) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{\nu} \\ &\quad \times \frac{J_1(\nu A)}{J_0(\nu A)} \exp i \kappa(Z' - Z + nL). \end{aligned}$$

If necessary we may assure the existence of the inner integral by the introduction of small losses ($\text{Im } \beta < 0$) which, in this case, remove the poles from the axis of integration exactly in the sense required by the Sommerfeld radiation condition [2, p. 196]. Consequently we can apply POISSON'S Theorem [3, p. 69] with the result:

$$H^{(i)}(Z) = \frac{i\beta}{\xi} \int_{-L/2}^{+L/2} dZ' E(Z') \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v_n L} \cdot \frac{J_1(v_n A)}{J_0(v_n A)} \exp i(Z' - Z) \frac{2n\pi + \theta}{L}$$

where

$$v_n^2 = \beta^2 - \left(\frac{2n\pi + \theta}{L} \right)^2.$$

This is exactly the expansion of $H^{(i)}$ into spatial harmonics. The kernel

$$g^{(i)}(Z, Z'; \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v_n L} \cdot \frac{J_1(v_n A)}{J_0(v_n A)} \exp i(Z' - Z) \frac{2n\pi + \theta}{L} \quad (6)$$

has the following properties:

$$\left. \begin{aligned} \text{(a) it is hermetic: } g(Z, Z'; \theta) &= g^*(Z', Z; \theta), \\ \text{(b) it is periodic in } \theta: g(Z, Z'; \theta + 2\pi) &= g(Z, Z'; \theta), \\ \text{(c) } g(Z, Z'; -\theta) &= g^*(Z, Z'; \theta). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

The same properties will be assumed to hold for the kernel resulting from the field outside the electron beam. For example it may be shown by Fourier analysis that

(a) for a ring-loaded waveguide (Figure 2)

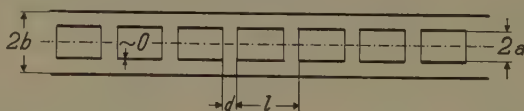


Figure 2

Ring-loaded waveguide.

$$\left. \begin{aligned} g^{(a)}(Z, Z'; \theta) &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v_h L} \cdot \frac{J_1(v_h A)}{J_0(v_h A)} \frac{Y_0(v_h B) - J_0(v_h B) Y_1(v_h A)}{Y_0(v_h B) - J_0(v_h B) Y_0(v_h A)} \\ &\times \exp i(Z' - Z) \frac{2n\pi + \theta}{L} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

where

$$v_n^2 = \beta^2 - \left(\frac{2n\pi + \theta}{L} \right)^2.$$

(b) for a disc-loaded waveguide (Figure 3)

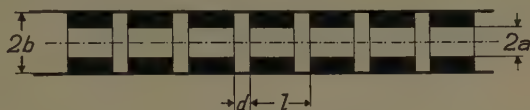


Figure 3

Disc-loaded waveguide.

$$g^{(a)}(Z, Z'; \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_n}{\mu_n D} \cdot \left. \begin{aligned} & \frac{J_1(\mu_n A)}{J_0(\mu_n A)} \frac{Y_0(\mu_n B)}{Y_0(\mu_n B)} - \frac{J_0(\mu_n B)}{J_0(\mu_n B)} \frac{Y_1(\mu_n A)}{Y_0(\mu_n A)} \\ & \times \cos n \pi \left(\frac{Z}{D} + \frac{1}{2} \right) \cos n \pi \left(\frac{Z'}{D} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

where

$$\mu_n^2 = \beta^2 - \left(\frac{n \pi}{D} \right)^2; \quad \delta_n = 1, n = 0; \quad \delta_n = 2, n > 0.$$

Thereby the occurring cylinder functions have to be replaced by the corresponding modified Bessel functions if the arguments become imaginary.

A similar transformation is now applied to $H^{(e)}(Z)$. Equation (5) leads to the following Fourier representation:

$$E(Z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} E(Z'') dZ'' \sum_{n=-N}^{+N} \exp i(Z'' - Z) \frac{2 n \pi + \theta}{L}.$$

This is introduced into equation (3) yielding

$$\begin{aligned} H^{(e)}(Z) &= \frac{i 2 \beta \varepsilon^2}{\zeta A L} \int_0^{\infty} dZ' \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{+L/2} E(Z'') dZ'' \sum_{n=-N}^{+N} \exp i(Z'' + Z' - Z) \frac{2 n \pi + \theta}{L} \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \frac{\sin \varepsilon_k Z'}{\varepsilon_k} \exp (-i Z') \\ &= \frac{i 2 \beta \varepsilon^2}{\zeta A L} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{+L/2} E(Z'') dZ'' \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \sum_{n=-N}^{+N} \exp i(Z'' - Z) \frac{2 n \pi + \theta}{L} \\ &\times \int_0^{\infty} dZ' \frac{\sin \varepsilon_k Z'}{\varepsilon_k} \exp i \left(\frac{2 n \pi + \theta}{L} - 1 \right) Z'. \end{aligned}$$

To justify the last step we have to impose the condition $\text{Re } i \theta < 0$. We can thus calculate the inner integral.

$$\int_0^{\infty} dZ' \frac{\sin \varepsilon_k Z'}{\varepsilon_k} \exp i \left(\frac{2 n \pi + \theta}{L} - 1 \right) Z' = \frac{1}{\varepsilon_k^2 - [(2 n \pi + \theta)/L - 1]^2}.$$

Hence we have the representation

$$H^{(e)}(Z) = \frac{i\beta}{\zeta} \int_{-L/2}^{+L/2} g^{(e)}(Z, Z'; \theta) E(Z') dZ'$$

where

$$g^{(e)}(Z, Z'; \theta) = \frac{2\epsilon^2}{AL} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\exp i(Z' - Z)(2n\pi + \theta)/L}{\epsilon_k^2 - [(2n\pi + \theta)/L - 1]^2} \quad (10)$$

which again, by analytic continuation, is valid for real (and complex) values of θ .

Setting

$$g(Z, Z'; \theta) = g^{(a)}(Z, Z'; \theta) - g^{(i)}(Z, Z'; \theta)$$

and presuming that within an elementary cell, the boundary condition is

$$E(Z) = 0 \quad L > |2Z| > D$$

our integral equation (2) becomes:

$$\int_{-D/2}^{+D/2} [g(Z, Z'; \theta) - g^{(e)}(Z, Z'; \theta)] E(Z') dZ' = 0. \quad (11)$$

§ 3. An Equivalent Variational Principle ([4] p. 79)

Multiply (11) by $E^*(Z)$, integrate and divide by the square of the line integral of the conjugate-complex electric field:

$$F(\theta) = \frac{\int_{-D/2}^{+D/2} \int_{-D/2}^{+D/2} [g(Z, Z'; \theta) - g^{(e)}(Z, Z'; \theta)] E^*(Z) E(Z') dZ dZ'}{\int_{-D/2}^{+D/2} \int_{-D/2}^{+D/2} E^*(Z) E(Z') dZ dZ'} = 0. \quad (12)$$

We calculate the changes in $F(\theta)$ with small variations of $E(Z)$ keeping $\theta = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \delta F(\theta) = & \frac{\int \int [g(Z, Z'; \theta) - g^{(e)}(Z, Z'; \theta)] [\delta E^*(Z) E(Z') + E^*(Z) \delta E(Z')] dZ dZ'}{\left| \int E(Z) dZ \right|^2} \\ & - \frac{\int \int [g(Z, Z'; \theta) - g^{(e)}(Z, Z'; \theta)] E^*(Z) E(Z') dZ dZ'}{\left| \int E(Z) dZ \right|^4} \\ & \times \frac{\int \int [\delta E^*(Z) E(Z') + E^*(Z) \delta E(Z')] dZ dZ'}{\left| \int E(Z) dZ \right|^4}. \end{aligned}$$

As the kernel are hermetic it follows:

$$\begin{aligned} \delta F(\theta) = & \frac{2}{\left| \int E(Z) dZ \right|^2} \operatorname{Real} \int \delta E^*(Z) dZ \int [g(Z, Z'; \theta) - g^{(e)}(Z, Z'; \theta)] E(Z') dZ' \\ & - \frac{\int E^*(Z) dZ \int [g(Z, Z'; \theta) - g^{(e)}(Z, Z'; \theta)] E(Z') dZ'}{\left| \int E(Z) dZ \right|^4} \\ & \times 2 \operatorname{Real} \int \delta E^*(Z) dZ \int E(Z') dZ' \end{aligned}$$

and by (11)

$$\boxed{\delta F(\theta) = 0.} \quad (13)$$

We can thus find a good approximation for $F(\theta)$ if we take as $E(Z)$ a function which is close to the rigorous solution of (11). Such an estimation may be provided by a suitable electrostatic problem. Hence $E(Z)$ will be supposed to be a real, known function.

§ 4. Derivation of an Electromagnetic Difference-Equation

By defining voltage and influenced current with [1, p. 18]

$$V = -\left(\frac{u_0}{\omega}\right) \int_{-D/2}^{+D/2} E(Z) dZ, \quad I = -2\pi a \int_{-D/2}^{+D/2} H^{(e)}(Z) E^*(Z) dZ$$

it follows from (12)

$$2\pi i \beta A \int_{\xi} F(\theta) = i G(\theta) - \frac{I}{V} = 0 \quad (14)$$

where the admittance function $G(\theta)$ has been introduced as:

$$\boxed{G(\theta) = \frac{2\pi\beta A}{\xi} \cdot \frac{\int_{-D/2}^{+D/2} \int_{-D/2}^{+D/2} g(Z, Z'; \theta) E^*(Z) E(Z') dZ dZ'}{\int_{-D/2}^{+D/2} \int_{-D/2}^{+D/2} E^*(Z) E(Z') dZ dZ'}} \quad (15)$$

By the argument following equation (13) $G(\theta)$ may be supposed to be a known function of θ . It is easily proved by (7) that this function has the properties:

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &= G^*(\theta); \quad G(\theta + 2\pi) = G(\theta) \\ \text{and} \quad G(-\theta) &= G(\theta) \quad \text{as} \quad E^*(Z) = E(Z). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Although θ was initially assumed to be real we may expand the range of validity to complex values by analytic continuation. Thus $G(\theta)$ will be considered as a simply periodic meromorph function with the simple period 2π . Because of the properties (16) $G(\theta)$ is real for the following values of $\theta = x + iy$:

$$\theta = x, \quad y = 0; \quad \theta = m\pi + iy, \quad |m| = 0, 1, 2, \dots$$

The zeros $\theta_k^{(n)}$ of $G(\theta)$ are located along these lines. Let $\pm \theta_k$ be the zeros of $G(\theta)$ within a period strip defined by $-\pi \leq x \leq \pi$ (see Figure 4) and let them be arranged in such a way that

$$0 \leq \text{Imag } \theta_0 \leq \text{Imag } \theta_1 \leq \text{Imag } \theta_2 \leq \dots \quad 0 \leq \text{Re } \theta_k \leq \pi$$

then it follows from (16) that

$$G(\pm \theta_k^{(n)}) = 0; \quad \pm \theta_k^{(n)} = \theta_k + 2n\pi; \quad k, |n| = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

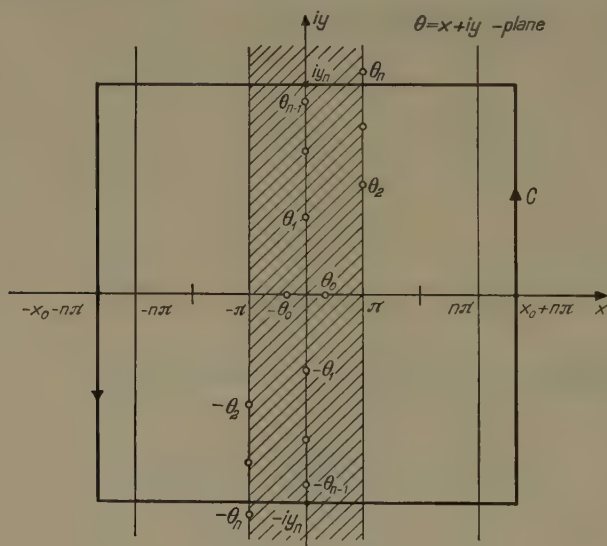


Figure 4
The zeros of $G(\theta)$ within a period-strip.

The zeros $\theta_k^{(n)}$ will now be supposed to be of the first order except when $\theta_k = 0, \pi$. CAUCHY's method of decomposition into partial fractions [5, p. 118] gives then:

$$\frac{1}{G(\theta)} = \frac{1}{G(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{\theta=\theta_k} \frac{1}{G(\theta)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\theta - (\theta_k + 2n\pi)} + \frac{1}{\theta_k + 2n\pi} \right] \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{\theta=-\theta_k} \frac{1}{G(\theta)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\theta + (\theta_k + 2n\pi)} - \frac{1}{\theta_k + 2n\pi} \right],$$

where

$$\operatorname{Res}_{\theta=\theta_k} \frac{1}{G(\theta)} = - \operatorname{Res}_{\theta=-\theta_k} \frac{1}{G(\theta)} = \frac{1}{G'(\theta_k)}, \quad G'(\theta) = \frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} \quad (18)$$

are the residues corresponding to the zeros $\pm \theta_k^{(n)}$.

The inner series may be easily summed up yielding

$$\frac{1}{G(\theta)} = \frac{1}{G(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{G'(\theta_k)} \left[\cotg \frac{\theta_k}{2} - \frac{\sin \theta_k}{\cos \theta - \cos \theta_k} \right]. \quad (19)$$

This representation is valid if

$$\oint_C \left| \frac{d\theta}{G(\theta) \theta^2} \right| \rightarrow 0,$$

where C is a contour extending to infinity in such a way that no zero of $G(\theta)$ becomes a point of C (see Figure 4).

Let

$$\operatorname{Imag} \theta_{n-1} < y_n < \operatorname{Imag} \theta_n, \quad n > N > 0$$

$$0 < x_0 < \pi, \quad x_0 \neq \operatorname{Real}(\theta_k, \pi - \theta_k); \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

then a suitable contour may be defined by

$$\theta = x_0 + n\pi + iy, \quad -y_n \leq y \leq y_n,$$

$$\theta = x + iy_n, \quad -n\pi - x_0 \leq x \leq x_0 + n\pi,$$

$$\theta = -x_0 - n\pi + iy, \quad -y_n \leq y \leq y_n,$$

$$\theta = x - iy_n, \quad -n\pi - x_0 \leq x \leq x_0 + n\pi.$$

Now if

$$\left. \begin{aligned} |G(x_0 + iy)| &> M \neq 0, & -\infty < y < +\infty, \\ |G(x + iy_n)| &> M \neq 0, & -\pi < x < +\pi, n > N > 0, \\ y_n &= O(n^\delta), & \frac{1}{2} < \delta < 2, n > N > 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

it follows

$$0 < \int_C \left| \frac{d\theta}{G(\theta) \theta^2} \right| < \frac{2}{M} \int_{-y_n}^{+y_n} \frac{dy}{(x_0 + n\pi)^2 + y^2} + \frac{2}{M} \int_{x_0 - n\pi}^{+x_0 + n\pi} \frac{dx}{x^2 + y_n^2} \\ < \frac{4}{M} \cdot \frac{y_n}{(x_0 + n\pi)^2} + \frac{4}{M} \cdot \frac{x_0 + n\pi}{y_n^2} \rightarrow 0 \quad q. e. d.$$

We may check the conditions (20) in special cases but it seems to be extremely difficult to transfer them into general conditions for the respective kernel $g(Z, Z'; \theta)$.

Equation (14) may finally be written

$$\frac{I}{i G(\theta)} = \frac{I}{i G(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I}{i G'(\theta_k)} \left[\cotg \frac{\theta_k}{2} - \frac{\sin \theta_k}{\cos \theta - \cos \theta_k} \right] = V. \quad (21)$$

If the electron beam is absent we have $I = 0$ and we get non-trivial solutions $V \neq 0$ for infinite sets of eigen-values

$$\theta = \theta_k^{(n)} = \pm \theta_k + 2n\pi.$$

We shall fix our attention to one of these sets, say

$$k = 0: \quad \theta_0^{(n)} = \pm \theta_0 + 2n\pi.$$

Treating the influenced current as a small perturbation we have $\theta \cong \theta_0^{(n)}$ and thus very nearly

$$\frac{I}{i G(\theta)} = \frac{I}{i G(0)} + \frac{I}{i G'(\theta_0)} \left[\cotg \frac{\theta_0}{2} - \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta - \cos \theta_0} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I}{i G'(\theta_k)} \left[\cotg \frac{\theta_k}{2} - \frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_0 - \cos \theta_k} \right]. \quad (22)$$

To compare this with equation (1) we introduce

$$V(n) = V \exp(-n\Gamma), \quad I(n) = I \exp(-n\Gamma)$$

with the result

$$V = \left[\frac{Z}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \Gamma}{\operatorname{ch} \Gamma - \operatorname{ch} \Gamma} - W \right] I, \quad (23)$$

Consequently we get:

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= i \theta, \\
 \Gamma &= i \theta_0, \\
 Z &= \frac{2}{G'(\theta_0)}, \\
 W &= \frac{i}{G(0)} + \frac{i}{G'(\theta_0)} \cotg\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{G'(\theta_k)} \left[\cotg\left(\frac{\theta_k}{2}\right) - \frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_0 - \cos \theta_k} \right].
 \end{aligned} \tag{24}$$

Hence we have proved the validity of equation (1) under quite general conditions and found a way to calculate explicitly the important parameters Γ , Z , W . An example of this calculation will be given in a following paper.

Acknowledgement

The author wishes to express his appreciation to Prof. Dr. F. TANK for his encouragement and to Prof. Dr. E. STIEFEL for his helpful criticism.

List of Symbols

a	beam radius
$A = \omega a/u_0$	normalized beam radius
b	waveguide radius
$B = \omega b/u_0$	normalized waveguide radius
$c \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m sec}^{-1}$	velocity of light in free space
d	slot width
$D = \omega d/u_0$	normalized slot width
$e/m = -1,76 \cdot 10^{11} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ sec}^{-2}$	specific electronic charge
$E_Z(Z, R)$	axial component of the electric field intensity
$i_k = (p_k/A)/[1 + (p_k/A)^2]$	amplitudes of partial plasma waves
$H_\Phi(Z, R; \epsilon)$	azimuthal component of the magnetic field intensity
l	length of elementary cell = slot spacing
$L = \omega l/u_0$	normalized slot spacing
p_k	zeros of the Bessel function $J_0(x)$
r	radial coordinate
$R = \omega r/u_0$	normalized radial coordinate
W	disturbing impedance
z	axial coordinate
Z	normalized axial coordinate
Z	coupling impedance
$\beta = u_0/c$	normalized electron velocity
Γ	transfer constant for cold waves
Γ	transfer constant for influenced waves
$\epsilon = \Omega/\omega$	normalized plasma frequency of infinite beam

$\epsilon_k = \epsilon / \sqrt{1 + (p_k/A)^2}$	normalized plasma frequencies of finite beam
$\epsilon_0 \cong 10^{-9}/36 \pi A \text{ sec } V^{-1} m^{-1}$	permittivity of free space
$\zeta \cong 120 \pi VA^{-1}$	wave impedance of free space
θ	phase shift per elementary cell
κ	axial separation parameter
$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} V \text{ sec } A^{-1} m^{-1}$	permeability of free space
$\nu = \sqrt{\beta^2 - \kappa^2}$	radial separation parameter
ϱ_0	space-charge density
ω	angular frequency
$\Omega = \sqrt{(e/m) \varrho_0/\epsilon_0}$	plasma frequency of infinite beam

REFERENCES

- [1] DERFLER, H., *Zur Theorie der Elektronenstrahlröhren mit periodischem Aufbau*, Mitteilungen aus dem Institut für Hochfrequenztechnik ETH, No. 19 (Druckerei Leemann AG., Zürich, 1954).
- [2] SOMMERFELD, A., *Partielle Differentialgleichungen der Physik* (Dietrichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden, 1947).
- [3] MADELUNG, E., *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*, 4th edition (Julius-Springer, Berlin, 1950).
- [4] LEWIN, L., *Advanced Theory of Waveguides* (Iliffe & Sons, Ltd., London, 1951).
- [5] HURWITZ, A., and COURANT, C., *Funktionentheorie*, 3rd edition (Springer, Berlin, 1929).

Zusammenfassung

Auf Grund der Sechspoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik wurde an anderer Stelle [1, S. 23] eine elektromagnetische Differenzengleichung zweiter Ordnung abgeleitet. Dieses auf formalem Wege gewonnene Resultat ist für die Theorie der Traveling-Wave-Tubes von Bedeutung. Mit Hilfe der Maxwell-Lorentzschen Theorie wird nun gezeigt, dass die genannte Differenzengleichung unter viel allgemeineren Bedingungen zu Recht besteht. Der gleiche Weg führt zu einer Methode, die auftretenden Parameter explizite zu berechnen.

(Received: May 11, 1954.)

Gibt es eine statistische Mechanik der Sternsysteme?

Von RUDOLF KURTH, Bern¹⁾

§ 1

In der Literatur über Probleme der Stelldynamik finden sich vielfache Berufungen auf die statistische Mechanik. Fasst man sie alle zusammen, so scheint etwa die folgende Vorstellung von der Entwicklung eines Sternsystems verbreitet zu sein:

«Das System sei als mechanisch abgeschlossene Gesamtheit von sehr vielen, etwa n gravitierenden Massenpunkten gedacht. Befindet es sich im statistischen Gleichgewicht, so bleibt es darin, abgesehen von zufälligen kleinen Schwankungen. Befindet es sich nicht darin, so nimmt dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik entsprechend seine Entropie im Laufe der Zeit mit grösster Wahrscheinlichkeit zu, es strebt das statistische Gleichgewicht an und erreicht es nach einer Zeitdauer von der Grössenordnung der Relaxationszeit. Es besitzt dann eine Boltzmannsche Energie-, insbesondere also eine Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung. Ferner stellt sich Gleichverteilung der Energie ein.

Ein kugelsymmetrisches System sollte dann wie eine isotherme Gaskugel aufgebaut sein, und zwar mit überall unendlich kleiner Dichte; denn andernfalls müsste es eine unendliche Gesamtmasse besitzen. Den Prozess der Ausdehnung kann man sich konkret als ein Entweichen der Sterne hoher Geschwindigkeit aus dem noch in Entwicklung befindlichen System vorstellen. Auflösungsgeschwindigkeit und -zeit lassen sich an Hand der Maxwell'schen Verteilung berechnen.

Rotierende Systeme nehmen schliesslich eine konstante Winkelgeschwindigkeit an. Im Milchstrassensystem ist weder dieser Zustand starrer Rotation noch der der Gleichgewichtsverteilung erreicht; hieraus kann man sein Alter abschätzen.»

Die Richtigkeit dieser soeben skizzierten Meinung soll im folgenden geprüft werden.

§ 2

Statistik kann man nur treiben, wenn sich ein dem Problem angemessener Wahrscheinlichkeitsbegriff erklären lässt. Für das betrachtete mechanische System von n Massenpunkten ist die Wahrscheinlichkeit als eine Mengenfunktion anzusetzen, die für die (messbaren) Teilmengen des $(6n)$ -dimensionalen Phasenraumes Γ definiert ist und gewissen einschränkenden Bedingungen

¹⁾ Astronomisches Institut der Universität Bern.

unterliegt [8]¹⁾. Mit der Existenz einer solchen Wahrscheinlichkeit ist (im wesentlichen) die einer Wahrscheinlichkeitsdichte von folgenden Eigenschaften logisch gleichwertig:

1. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist eine im Phasenraum Γ erklärte Punktfunktion.
2. Sie ist nichtnegativ.
3. Sie ist normiert, das heisst, ihre Integration über den ganzen Phasenraum ergibt den Wert eins.
4. Sie ist ein (im allgemeinen zeitunabhängiges) Integral der Bewegungsgleichungen.

Der letzte Punkt ist im wesentlichen eine unmittelbare Folge aus dem Liouvilleschen Satze. Ein System muss nämlich für alle Punkte seiner Bahnkurve im Phasenraum Γ dieselbe (infinitesimale) Wahrscheinlichkeit besitzen – andernfalls würde der mathematische Begriff « Wahrscheinlichkeit » allen Bezug auf den allgemeinen Begriff verlieren. Nun bleibt nach jenem Satze der Inhalt eines Volumelements längs der Bahnkurven konstant. Also muss dasselbe auch für den Quotienten als Wahrscheinlichkeit und Inhalt gelten, das heisst für die Wahrscheinlichkeitsdichte.

Wir können also sagen: Eine statistische Mechanik für eine bestimmte, durch die Bewegungsgleichungen gekennzeichnete Art von mechanischen Systemen ist dann und nur dann möglich, wenn sich ein nichtnegatives normierbares erstes Integral dieser Bewegungsgleichungen angeben lässt. Dieses Integral kann dann als Wahrscheinlichkeitsdichte gewählt werden.

Hierbei haben wir den Fall betrachtet, dass für den ganzen Phasenraum eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert werden soll. Statt dessen kann man sich auch darauf beschränken, Wahrscheinlichkeiten überhaupt nur auf einer in Γ gelegenen « invarianten Hyperfläche » Σ zu erklären; es soll also Σ dadurch definiert sein, dass ein oder einige erste Integrale der Bewegungsgleichungen auf Σ konstant sind.

Inhaltlich liefert dieser neue Wahrscheinlichkeitsansatz nichts prinzipiell Neues. Auch für ihn bleibt die obige Bedingung im wesentlichen gültig. In den praktisch wichtigen Fällen reduziert sie diese auf die Bedingung, dass Σ einen positiven endlichen Flächeninhalt besitzt.

§ 3

Im Anschluss an MAXWELL entwarf HECKMANN [5] eine statistische Mechanik gravitierender Massenpunktsysteme folgendermassen: Auf einer Hyperfläche Σ , die durch die Konstanz der bekannten elementaren Integrale erklärt ist, wählte er als (Flächen-) Wahrscheinlichkeitsdichte die entsprechende Verallgemeinerung der bekannten mikrokkanonischen Verteilung. Dass die Nor-

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 125.

mierungsbedingung erfüllt ist, setzte der Autor stillschweigend voraus. Das jedoch trifft wegen der besonderen Form des Newtonschen Potentials sicherlich nicht zu – wie wenigstens für den Fall $n = 3$ bereits POINCARÉ gezeigt hat [9].

Hier tritt also die grundlegende Schwierigkeit und, wie es scheint, Unmöglichkeit einer statistischen Mechanik der Sternsysteme zu Tage: Es gelingt nicht, ein nichtnegatives normierbares erstes Integral der Bewegungsgleichungen anzugeben. Das Gravitationspotential steigt bei wachsender Entfernung zu langsam an, die Gravitationskräfte sind zu «weich», so dass die Flächen Σ sich ins Unendliche erstrecken und unendlichen Inhalt besitzen.

§ 4

CHANDRASEKHAR und VON NEUMANN versuchten den folgenden Entwurf einer statistischen Mechanik der Sternsysteme.

Sie betrachteten n Massenpunkte innerhalb einer Kugel K des realen Raumes \mathfrak{R}^3 , die den Radius R besitzt. Die Ortsvektoren der Massenpunkte seien \mathbf{r}_i , ihre Impulse seien \mathbf{p}_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Alle Massen werden als gleich angenommen. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\tau_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$ des i -ten Massenpunktes setzen die Autoren willkürlich

$$\tau_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) = \begin{cases} \frac{1}{4 R^3/3} \cdot \frac{j^3}{\pi^{3/2}} e^{-j^2 \mathbf{p}_i^2}, & \text{wenn } \mathbf{r}_i \in K, \\ 0, & \text{wenn } \mathbf{r}_i \in \mathfrak{R}_3 - K, \end{cases} \quad (4.1)$$

$j = \text{const} > 0$; und ferner für die Wahrscheinlichkeitsdichte T in Γ :

$$T = \prod_{i=1}^n \tau_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i). \quad (4.2)$$

Hiermit bestimmen sie die Verteilungsfunktion und «mittlere Lebensdauer» der Gravitationskraft. An geeigneter Stelle wird dabei der Grenzübergang

$$n \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow \infty \quad \text{mit} \quad \frac{n}{4 \pi R^3/3} = \text{const} > 0$$

vollzogen.

Jedoch: T ist für kein endliches n ein Integral der Bewegungsgleichungen, das System ändert von Augenblick zu Augenblick seine (infinitesimale) Wahrscheinlichkeit. $\lim_{R \rightarrow \infty} T$ ist zwar ein Integral, ist nämlich Null, ist aber gewiss nicht normierbar und daher als Wahrscheinlichkeitsdichte ebenfalls unbrauchbar.

§ 5

Wenn auch der soeben erörterte Wahrscheinlichkeitsansatz nicht als zulässig erscheinen kann, so sei es doch erlaubt, ihn in ganz einfacher Weise auszuwerten und das Problem so noch von einer andern Seite zu beleuchten.

Die Autoren fragten nach der Verteilungsfunktion der Gravitationskraft (je Einheitsmasse), die die n Massenpunkte in irgendeinem festen Raumpunkt \mathbf{r}_0 erzeugen. Man kann nun eine « Statistik des Gravitationsfeldes in Γ » ohne jede Rechnung aufstellen, wenn man statt der Kraft das Potential

$$V = \sum_{i=1}^n V_i, \quad V_i = - \frac{G m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|} \quad (5.1)$$

auf die Einheitsmasse untersucht. (G bedeute die Gravitationskonstante, m_i die Masse des i -ten Partikels.)

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte im Phasenraum Γ nehmen wir wieder den Produktausdruck (4. 2) als gültig an, lassen aber den speziellen Ansatz (4. 1) fallen, indem $\tau_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$ nun irgendeine « vernünftige » Wahrscheinlichkeitsdichte bedeuten soll. Die Einzelpotentiale V_i können dann als unabhängige statistische Variablen angesehen werden. Nach dem Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung besitzt (unter geeigneten Voraussetzungen über die τ_i) das Gesamtpotential V eine annähernd Gaußsche Verteilung:

$$\omega(V) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(V - \bar{V})^2 / 2\sigma^2}, \quad (5.2)$$

wobei das Streuungsquadrat

$$\overline{(V - \bar{V})^2} = \sigma^2$$

gesetzt ist. Querstriche bezeichnen Erwartungswerte. Diese beziehen sich zunächst auf die Verteilungsfunktion von V ; zum Beispiel:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= \int_{-\infty}^{+\infty} V \omega(V) dV, \\ \overline{(V - \bar{V})^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (V - \bar{V})^2 \omega(V) dV. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Jedoch gilt offensichtlich für jede Funktion $f(V)$:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(V) \omega(V) dV \\ &= \int_{\Gamma} f[V(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)] T(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) d\mathbf{r}_1, \dots, d\mathbf{r}_n, d\mathbf{p}_1, \dots, d\mathbf{p}_n. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Durch die Schreibweise haben wir angedeutet, dass V in der oberen Zeile als unabhängige Veränderliche, in der unteren Zeile als Funktion der Vektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ anzusehen ist.

Erklären wir noch die Wahrscheinlichkeitsdichten u_i und U durch

$$\left. \begin{aligned} u_i(\mathbf{r}_i) &= \int_{(\mathbf{p}_i)} \tau_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) d\mathbf{p}_i, \\ U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) &= \int_{(\mathbf{p}_1)} \dots \int_{(\mathbf{p}_n)} T(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) d\mathbf{p}_1, \dots, d\mathbf{p}_n = \prod_{i=1}^n u_i(\mathbf{r}_i), \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

so erhalten wir aus (5.4):

$$\bar{f} = \int_{(\mathbf{r}_1)} \dots \int_{(\mathbf{r}_n)} f[V(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)] U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) d\mathbf{r}_1, \dots, d\mathbf{r}_n;$$

ferner:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= \sum_{i=1}^n \bar{V}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{(\mathbf{r}_i)} \frac{-G m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|} u_i(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i, \\ (V - \bar{V})^2 &= \left[\sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V}_i) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{(V_i - \bar{V}_i)^2} + \sum_{i \neq j} \overline{(V_i - \bar{V}_i)(V_j - \bar{V}_j)} \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{(V_i - V_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{(\mathbf{r}_i)} \left[\frac{-G m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0|} - V_i(\mathbf{r}_0) \right]^2 u_i(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Wir nehmen jetzt alle Massen $m_i = m$ an. Dann erhalten wir erstens:

$$V = n V_1,$$

$$(V - \bar{V})^2 = n (V_1 - \bar{V}_1)^2,$$

das heisst: Die relative Streuung der Werte V um den Erwartungswert $V(\mathbf{r}_0)$ ist $0(1/\sqrt{n})$, wird also bei hinreichend grosser Partikelzahl beliebig klein; das Potential V ist für die verschiedenen Konfigurationen $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ nahezu konstant und nahezu gleich dem Erwartungswerte $V(\mathbf{r}_0)$.

Und zweitens: $n m$ ist die Gesamtmasse des Systems. Das Produkt

$$\varrho(\mathbf{r}) = n m u_1(\mathbf{r})$$

kann als seine Massendichte im realen Raum \mathfrak{R}^3 gedeutet werden – das heisst: Ist B irgendein Bereich des \mathfrak{R}^3 , so ist

$$\int_B \varrho(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}$$

der Erwartungswert für die in B enthaltene Masse. Für diese Massendichte gilt nun nach (5. 6):

$$\bar{V}(\mathbf{r}_0) = -G \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{\varrho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \, d\mathbf{r},$$

der Erwartungswert des Potentials ist also so zu berechnen, als ob die Masse des Systems über den realen Raum mit der Dichte $\varrho(\mathbf{r})$ stetig ausgebreitet wäre.

Eine geringe Modifikation des Gedankenganges ergibt ein ähnliches Resultat für das Potential, das je $n - 1$ Massenpunkte auf den jeweils n -ten ausüben. Das heisst also: Das «geglättete» Potential des ganzen Systems sollte über das von irgendeinem Einzelstern herrührende Potential immer stark überwiegen. Insbesondere dürfte es keine «Doppelsterne» geben. Die Theorie mündet in die gewöhnliche Stelldynamik ein.

In den wirklichen Sternsystemen gibt es nun aber Doppelsterne, und zwar relativ recht häufig. Das wird im Rahmen jenes Ansatzes dann so gedeutet, dass wegen des geringen Alters zum Beispiel des Milchstrassensystems die Doppelsterne noch nicht genügend Zeit gehabt hätten, sich aufzulösen [2].

Überhaupt erscheint die Existenz von Doppelsternen mit der Unmöglichkeit einer statistischen Mechanik aufs innigste verknüpft:

Doppelsterne scheint es (bei irgendeinem Gesetz der wechselseitigen Anziehung) dann und nur dann geben zu können, wenn das Anziehungspotential zwischen je zwei Massenpunkten eine nach unten unbeschränkte Funktion ihres Abstandes ist. Dann wird nämlich bei genügender Annäherung zweier Sterne das gegenseitige Potential absolut viel grösser als das Potential, das die übrigen Partikel auf sie ausüben.

Sind umgekehrt die wechselseitigen Potentiale nach unten beschränkt, so können sie als nichtnegativ mit dem Minimum Null angenommen werden. Bei hinreichend grosser Partikelzahl n überwiegt dann aber das geglättete Gesamtpotential das gegenseitige Potential der beiden Massenpunkte so stark, dass diese im Laufe der Zeit wohl sicherlich getrennt werden.

In diesem Falle lässt sich mittels des Energieintegrals gewiss eine Wahrscheinlichkeitsdichte im Phasenraum Γ konstruieren.

Sind die Potentiale nach unten nicht beschränkt, so erstrecken die Flächen konstanter Energie sich bis ins Unendliche, und die Definition einer Wahrscheinlichkeitsdichte wird höchstens in Ausnahmefällen möglich sein. —

Zu unserer Untersuchung des Wahrscheinlichkeitsansatzes (4. 2) sei noch angemerkt: Es ist nicht ohne weiteres möglich, in ihr das Potential durch eine Kraftkomponente zu ersetzen. Der Integralausdruck für das Streuungsquadrat würde nämlich divergieren, wie man aus (5. 6) ohne Mühe abliest, indem man den entsprechenden Ausdruck für den Potentialgradienten bildet.

§ 6

Wir wissen, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung lässt sich im Phasenraume Γ sicherlich nicht definieren. Nehmen wir an, es wäre doch möglich. Was würde daraus folgen?

Der Boltzmannsche Verteilungssatz könnte dennoch nicht gelten. Denn für ihn ist die Voraussetzung wesentlich, dass die Wechselwirkungsenergie gegen die übrige mechanische Energie vernachlässigbar klein ist. Das trifft für Sternsysteme nun gerade nicht zu: Ihre gesamte potentielle Energie ist Wechselwirkungsenergie.

Damit wird auch die Konstruktion der isothermen Gaskugel als eines Modelles für die Sternsysteme hinfällig – sie beruht wesentlich auf dem Boltzmannschen Satze.

Dagegen bliebe die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung gültig. Zwar ist sie eine spezielle Boltzmannverteilung, jedoch bleibt sie von dem obigen Einwand unberührt, weil es für die kinetische Energie keine Wechselwirkungsglieder gibt.

Auch der Gleichverteilungssatz würde für die kinetische Energie daher bestehenbleiben.

Dass er im Milchstrassensystem nicht erfüllt zu sein scheint, darf nach dem Früheren aber nicht als Grundlage für irgendwelche Schlüsse über das «Alter» des Systems benutzt werden. Im übrigen hätten wir bei solcher Anwendung überhaupt erst noch zu klären, in welcher Weise statistische Aussagen am konkreten System interpretiert werden können [7] [8].

Die Rechnungen über die «Auflösung» oder «Verdampfung» etwa eines Kugelsternhaufens [1] würden durchaus bedenklich erscheinen: Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung gilt nur approximativ [7] [8]. Bei jenen Rechnungen wird es nun aber gerade in Geschwindigkeitsbereichen benutzt, in denen eine genügende Annäherung nicht verbürgt werden kann.

Wie sich übrigens aus einem fundamentalen Satz der allgemeinen Mechanik von E. HOPF [6] folgern lässt, kann die Auflösung eines Sternsystems «von selbst», das heisst ohne die Mitwirkung äusserer Kräfte, nur ein ganz seltener Ausnahmefall sein – und nicht die Regel, wie man nach jenen Rechnungen annehmen müsste. (Damit der Hopfsche Satz anwendbar wird, muss durch passende Abänderung des Gravitationsgesetzes für sehr kleine Entfernungen r die Singularität des Potentials für $r = 0$ beseitigt werden.)

Schliesslich: Die Berufung auf den zweiten Hauptsatz wäre in der in § 1 wiedergegebenen Weise nicht statthaft. Jedoch könnte das Gibbsche H -Theorem angewandt werden. Da die genauere Erörterung dieses Punktes einen allzu breiten Raum einnehmen würde, verzichten wir hier auf sie und verweisen auf [8].

§ 7

Schliesslich werde der Begriff der Relaxationszeit T noch etwas eingehender behandelt. Er wird zum Beispiel so definiert: Während eines Zeitintervalls von der Länge T erreicht der mittlere Umsatz eines Sterns an kinetischer Energie deren Mittelwert – oder ähnlich. Gemeinsam ist allen Erklärungen: Gegen Ende dieses Intervalls haben die Begegnungen eines Sterns mit anderen Einzelsternen im Mittel einen merklichen Einfluss auf seine Bewegung gewonnen, so dass nun nicht mehr damit gerechnet werden kann, dass das in der Stelldynamik übliche Modell einer im sechsdimensionalen Phasenraum μ strömenden Flüssigkeit brauchbar bleibt.

Es wird behauptet bzw. als selbstverständlich angenommen: Innerhalb eines Zeitintervalls von der Länge T stellt sich das «statistische Gleichgewicht» her, sofern es vorher nicht bestand. Mit statistischem Gleichgewicht ist eine Boltzmannsche bzw. eine Maxwellsche Verteilung gemeint.

Unsere vorangehenden kritischen Erörterungen haben jedoch wohl hinreichend dargetan: Diese Behauptung könnte bezüglich der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung nur dann als begründet, ja überhaupt als sinnvoll angesehen werden, wenn im Phasenraum Γ sich eine vernünftige Wahrscheinlichkeitsdichte angeben lässt. Und das allgemeine Boltzmannsche Verteilungsgesetz würde auf keinen Fall gelten.

Die übliche Berechnungsart dieser Relaxationszeit benutzt die (sich ja eigentlich ausschliessenden) Grundvorstellungen von Partikel und Kontinuum zugleich, setzt gleichförmige Dichte und Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung voraus und berücksichtigt nur die Begegnungen je zweier Sterne – im ganzen ein recht zweifelhafter Ansatz (abgesehen von dem obigen Kardinal-einwand). CHANDRASEKHARS Rechnung für kugelsymmetrische Systeme [1] zeitigt das paradoxe Ergebnis: Je mehr Sterne innerhalb einer Kugel von festem Radius, um so grösser T – um so kleiner also der Einfluss der Begegnungen. Das entspricht ganz den Folgerungen, die in § 5 aus der Statistik (4. 1), (4. 2) gezogen wurden.

Mittels jener Statistik versuchten CHANDRASEKHAR und VON NEUMANN, den Mehrfachbegegnungen Rechnung zu tragen. Den grundsätzlichen Bedenken von § 4 und § 5 fügen wir einen empirischen Hinweis von FRICKE hinzu [4]. Demnach liefern entsprechende und entsprechend hergeleitete Formeln für die Relaxationszeiten in Elektronenplasmen Werte, die um Faktoren bis zu 10^3 gegenüber den gemessenen zu gross sind.

§ 8

Als Kern der Erklärung in § 7 für die Relaxationszeit T heben wir heraus: Gegen Ende eines Zeitintervalls von der Länge T haben die wechselseitigen Begegnungen der Sterne auf ihre Bewegungen einen solchen Einfluss gewonnen, dass das stellardynamische Kontinuummodell mit seinem geglätteten Potential fernerhin nicht mehr als eine zureichende Näherungskonstruktion angesehen werden kann.

Wir geben eine einfache Abschätzung von T . Sie ist zwar hypothetisch, erscheint aber doch wohl als hinlänglich begründet:

Das Kontinuummodell wird durch die folgenden Grundgleichungen beschrieben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} u_j - \frac{\partial f}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_j} \right) &= 0, \\ \varrho &= \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, x, t) du_1 du_2 du_3, \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2} &= 4 \pi G \varrho. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Hierbei bedeuten:

- t die Zeit,
- x_i ($i = 1, 2, 3$) rechtwinklige kartesische Koordinaten im gewöhnlichen Raum \mathbb{R}^3 ,
- u_i die zugeordneten linearen Geschwindigkeitskomponenten,
- x den Vektor (x_1, x_2, x_3) ,
- u den Vektor (u_1, u_2, u_3) ,
- $\varrho(x, t)$ die Massendichte des Systems im \mathbb{R}^3 ,
- $f(u, x, t)$ seine Massendichte im sechsdimensionalen (u, x) -Raum,
- $V(x, t)$ das vom System erzeugte Gravitationspotential auf die Einheitsmasse.

Wir führen nun dimensionslose Variable ein; sie seien durch \sim gekennzeichnet:

$$x_i = x^* \tilde{x}_i, \quad u_i = x^* \sqrt{G \varrho^*} \tilde{u}_i, \quad t = \frac{1}{\sqrt{G \varrho^*}} \tilde{t},$$

$$\left. \begin{aligned} f(u, x, t) &= \frac{1}{x^{*3} G \sqrt{G \varrho^*}} \tilde{f}(\tilde{u}, \tilde{x}, \tilde{t}), \\ \varrho(x, t) &= \varrho^* \tilde{\varrho}(\tilde{x}, \tilde{t}), \\ V(x, t) &= x^{*2} G \varrho^* \tilde{V}(\tilde{x}, \tilde{t}). \end{aligned} \right\}$$

x^* und ϱ^* bedeuten dimensionsbehaftete Konstante; x^* eine für das jeweilige Modell charakteristische Länge (Durchmesser, Radius oder dergleichen), ϱ^* eine charakteristische Dichte, etwa die mittlere.

Führt man nun in die Grundgleichungen (8. 1) die dimensionslosen Veränderlichen ein, so ergeben sich für diese ganz entsprechende Gleichungen mit $\tilde{G} = 1$. Zu jeder dimensionslosen Lösung \tilde{f} gehört also eine zweiparametrische Schar dimensionsbehafteter Lösungen f .

Der dimensionslosen Zeitdauer 1 entspricht die « Zeitskala » t^* des Systems:

$$t^* = \frac{1}{\sqrt{\tilde{G} \varrho^*}} \approx \frac{1,5 \cdot 10^7}{\sqrt{\varrho^*}} [\text{Jahre}],$$

wenn die Dichte in Sonnenmassen je Kubikparsek gemessen wird.

Wenn wir nun sagen, das zeitliche Verhalten eines Sternsystems lasse sich überhaupt durch das Kontinuummodell beschreiben, so kann das doch nur bedeuten: f bzw. \tilde{f} ist eine brauchbare Annäherung für ein Zeitintervall mindestens von der dimensionslosen Grössenordnung 1. Denn andernfalls würde ja die Anwendbarkeit des Modells unmittelbar nach dem Zeitnullpunkt aufhören.

Das heisst: Ist für ein Sternsystem das Kontinuummodell überhaupt anwendbar, so ist die « Relaxationszeit » mindestens von der Grössenordnung seiner charakteristischen Zeitskala. In Zeichen:

$$T \gtrsim \frac{1}{\sqrt{\tilde{G} \varrho^*}} \approx \frac{10^7}{\sqrt{\varrho^*}} [\text{Jahre}].$$

Das ist exakt, weil ja fast eine Tautologie. Es bleiben jedoch noch zwei Punkte zu klären:

Erstens: Unter welchen Bedingungen ist denn die Anwendung jenes Modells zulässig? Uns erscheint die Vermutung plausibel: für alle Anfangszustände des Massenpunktsystems, die sich mit hinreichender Annäherung durch eine kontinuierliche Anfangs-« Verteilung » $f(u, x, 0)$ darstellen lassen.

Und zweitens: Wir haben für den Parameter die mittlere (Anfangs-) Dichte gewählt. Man könnte doch statt dessen auch zum Beispiel die maximale Anfangsdichte oder das 10^{20} -fache oder auch das 10^{-20} -fache dieses Wertes nehmen. Wie ist die Auszeichnung der mittleren Dichte zu begründen?

Man führe in die Bewegungsgleichungen, die zur ersten Gleichung (8. 1) gehören:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= -\frac{\partial V}{\partial x_i} \\ &= G \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{\varrho(y, t)}{|y - x|} dy_1 dy_2 dy_3 \end{aligned}$$

die dimensionslosen Veränderlichen ein. Die dimensionslosen Beschleunigungen werden dann (dem Betrage nach) durchschnittlich in der Grössenordnung 1 liegen, wenn ϱ^* die mittlere Dichte bedeutet – ausser in ganz künstlichen Ausnahmefällen. Das rechtfertigt die besondere Wahl für ϱ^* . – Die theoretische Er-

fahrung an mechanischen Modellen bestätigt die Richtigkeit dieser Überlegung wohl ausnahmslos.

Beschluss

Auf die in der Überschrift gestellte Frage haben wir mit einem klaren Nein zu antworten: Bis jetzt existiert eine statistische Mechanik der Sternsysteme nicht, und es ist auch nicht abzusehen, wie sie möglich sein könnte.

Der Grund hierfür liegt im Charakter der Gravitation: Sie ist nicht stark genug, das System auf jeden Fall zusammenzuhalten. Eine statistische Mechanik der Gase ist nur möglich, weil das Gas zum Beispiel in einem Gefäß eingeschlossen ist oder durch die Schwerkraft der Erde am Entweichen verhindert wird. Man kann sagen: Für die statistische Mechanik ist das Gefäß ein wesentlicher Teil des Gases, und dieses Gefäß fehlt bei Sternsystemen.

Es ist dies im Grunde dieselbe Schwierigkeit, die uns in der Himmelsmechanik bei der Aufstellung von Stabilitätskriterien begegnet: Die Flächen konstanter Energie und alle andern aus ihnen abgeleiteten « Hillschen Grenzflächen » erstrecken sich ins Unendliche.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] CHANDRASEKHAR, S., *Principles of Stellar Dynamics* (The University of Chicago Press, Chicago 1947).
- [2] CHANDRASEKHAR, S., *On the Stability of Binary Systems*, Ap. J. 99, 54 (1944).
- [3] CHANDRASEKHAR, S., und VON NEUMANN, J., *The Statistics of the Gravitational Field*, I: Ap. J. 95, 489 (1942); II: Ap. J. 97, 1 (1943); III: Ap. J. 99, 25 (1944); IV: Ap. J. 99, 47 (1944).
- [4] FRICKE, W., *Kinematik und Dynamik des Milchstrassensystems*, Naturwissenschaften 38, 438 (1951).
- [5] HECKMANN, O., *Das statistische Gleichgewicht eines freien Systems von Massenpunkten*, I. Z. Astrophys. 23, 31 (1944).
- [6] HOPF, E., *Zwei Sätze über den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegungen dynamischer Systeme*, Math. Ann. 103, 710 (1930).
- [7] KHINCHIN, A. J., *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics* (Dover Publication, New York 1949).
- [8] KURTH, R., *Die Grundlagen der (klassischen) statistischen Mechanik*. (Noch unveröffentlicht.)
- [9] POINCARÉ, H., *Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste*, Bd. 3 (Gauthier-Villars, Paris, 1893).

Summary

It is shown that, on account of the "softness" of the force of gravitation, statistical mechanics cannot be applied to star systems, and that therefore all results basing upon it have no fundament.

(Eingegangen: 15. März 1954.)

Die Erregung reiner Eigenschwingungen von Flugzeugflügeln¹⁾

Eine Anwendung der Theorie der Integralgleichungen

Von ERNST SCHULTZE, Altenrhein²⁾

1. Einleitung

In der Flugzeugindustrie ist es üblich, nach Fertigstellung eines neuen Flugzeugtyps vor der Flugerprobung den sogenannten Standschwingungsversuch durchzuführen. Dabei werden mit elektrodynamischen Erregern sinusförmig variierende Kräfte an einigen Stellen des Flugzeuges, insbesondere am Flügel und am Leitwerk, angebracht. Der Zweck des Standschwingungsversuches ist die Ermittlung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen von Flügel und Leitwerk, deren Kenntnis dann für die Berechnung der kritischen Flattergeschwindigkeit wichtig ist.

Die Bestimmung der Eigenfrequenzen ist relativ einfach: Man variiert die Frequenz der erregenden Kräfte so lange, bis eine Resonanz (Amplitudenmaximum) eintritt. Schwieriger ist es, die zu dieser Eigenfrequenz gehörige Eigenschwingungsform (Amplitudenverteilung am Flügel bzw. Leitwerk) zu bestimmen, besonders, wenn eine zweite Eigenfrequenz in der Nähe liegt. Denn obwohl das Flugzeug mit nur einer Eigenfrequenz erregt wird, wird die Amplitudenverteilung ausser der zu dieser Eigenfrequenz gehörigen Eigenschwingungsform auch Anteile der andern Eigenschwingungsformen enthalten.

Es entstehen deshalb die Forderungen

1. nach einem Kriterium, ob in einem gegebenen Falle eine reine Eigenschwingungsform vorliegt oder nicht;
2. nach einer Methode zur Elimination möglichst vieler unerwünschter Eigenschwingungsformen, das heisst zur Herstellung einer möglichst reinen Eigenschwingungsform.

Es wird in dieser Arbeit gezeigt, dass 1. eine reine Eigenschwingungsform dann und nur dann vorliegt, wenn alle Punkte mit derselben Phase schwingen, und 2. um so mehr unerwünschte Eigenschwingungen eliminiert werden können, je grösser die Zahl der Erreger ist, wobei die Elimination durch Verändern der

¹⁾ Diese Arbeit, von der bereits ein Auszug im Journal of the Aeronautical Sciences, August 1954, erschienen ist, wurde im Anschluss an Untersuchungen geschrieben, die der Autor in den Flugzeugwerken Altenrhein gemacht hat.

²⁾ Flug- und Fahrzeugwerke AG.

Kraftamplituden der Erreger vorgenommen werden kann und zum Teil auch durch Verschieben der Angriffspunkte der Erreger.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind physikalisch sehr anschaulich und vermutlich gerade deshalb dem Praktiker zum Teil schon bekannt. Es herrschen aber sehr oft verschwommene Begriffe auf diesem Gebiet, was daher kommen mag, dass offenbar noch nirgends in der ohnehin spärlichen Literatur über den Standschwingungsversuch die grundlegenden Zusammenhänge klar dargestellt worden sind. Insbesondere ist die eigentlich naheliegende Anwendung der Theorie der linearen Integralgleichungen auf den Standschwingungsversuch offensichtlich neu. Es wird jedoch kaum möglich sein, ohne die Theorie der Integralgleichungen eine auch nur annähernd so einfache und übersichtliche Herleitung der wesentlichen Gesetze zu geben.

Der Flugzeugflügel sowie die Leitwerkflächen können idealisiert werden als zweidimensionale ebene Flächen, die eine eigene Steifigkeit und eine Massenverteilung besitzen und die längs eines Stückes ihres Randes (am Rumpf) eingespannt sind. Sie fallen also unter den in der mathematischen Physik üblichen Begriff «Platte». Eigenschwingungen von Platten sind zwar in der mathematischen Physik schon oft behandelt worden [1]¹⁾, jedoch nicht unter den für den Standschwingungsversuch geltenden Gesichtspunkten, welche oben erwähnt wurden.

Ausserdem lässt sich mit nur unwesentlichem Mehraufwand eine Art von Materialdämpfung berücksichtigen, die – im Gegensatz zu der sonst bekannten geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung – proportional zur Amplitude und in Phase mit der Geschwindigkeit ist. Eine solche Dämpfung ist dann vorhanden, wenn das Material im Spannungs-Dehnungs-Diagramm eine ellipsenförmige Hysteresiskurve besitzt [2] [3]. Die Berücksichtigung dieser Materialdämpfung ist besonders einfach, wenn man für die harmonische Zeitabhängigkeit die komplexe Schreibweise einführt; man braucht dann nämlich nur den Elastizitätsmodul des Materials mit der komplexen Zahl $(1 + i g)$ zu multiplizieren, wobei g eine Materialkonstante ist (für Metalle: $g \sim 0,02, \dots, 0,03$). Charakteristisch für diese Art von Dämpfung ist, dass die Resonanzfrequenz von der Dämpfung unabhängig ist.

2. Bezeichnungen

- x_1, x_2 = kartesische Koordinaten in der Flügelebene;
 $P(x_1, x_2)$ = Punkt auf dem Flügel;
 $y(P, t)$ = Verschiebung des Punktes P in vertikaler Richtung bei einer Deformation des Flügels als Funktion der Zeit t ;
 $dP = dx_1 dx_2$ = Flächenelement beim Punkte P ;
 $m(P)$ = Massenverteilung;

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 135.

- $m(P) dP$ = Masse des Flächenelementes dP ;
 $\delta(P, Q)$ = elastische Einflussfunktion (Greensche Funktion)
 = Deformation bei P , wenn Einheitskraft in vertikaler Richtung bei Q ;
 ν = Kreisfrequenz der Schwingung;

$$y(P, t) = y(P) e^{i\nu t}; \quad (1)$$

- $y(P)$ = vertikale Amplitude des Punktes P , im allgemeinen eine komplexe Zahl, deren Betrag die Amplitude der Schwingung und deren Argument die Phase der Schwingung gegenüber der Kosinusschwingung bedeutet;
 g = Konstante der Materialdämpfung;
 λ = Eigenwertparameter;
 Q_1, Q_2, \dots, Q_n = Punkte des Flügels, an denen die n äusseren Erregerkräfte $K_j(t)$ angreifen;
 $K_1(t), K_2(t), \dots, K_n(t)$ = vertikale Erregerkräfte, von denen vorausgesetzt wird, dass alle in Phase mit der Kosinusschwingung sind, also

$$K_j(t) = K_j e^{i\nu t} \quad (K_j \text{ reell, } j = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

ferner:

$$\varphi(P) = y(P) \sqrt{m(P)}, \quad (3)$$

$$K(P, Q) = \delta(P, Q) \sqrt{m(P) m(Q)}, \quad (4)$$

$$k_j = \frac{K_j}{\sqrt{m(Q_j)}}, \quad (5)$$

$$f(P) = (1 - i g) \sum_{j=1}^n k_j K(P, Q_j), \quad (6)$$

$$a_k = \sum_{j=1}^n K_j y_k(Q_j) = \sum_{j=1}^n k_j \varphi_k(Q_j). \quad (7)$$

3. Die Integralgleichungen und deren Lösungen

Die infinitesimale d'Alembertsche Trägheitskraft dT in einem Punkte Q des Flügels ergibt sich wegen (1) zu

$$dT(Q, t) = \nu^2 y(Q, t) m(Q) dQ.$$

Diese ergibt in einem Punkte P die Deformation

$$dy(P, t) = \delta(P, Q) dT(Q, t) = \nu^2 \delta(P, Q) m(Q) y(Q, t) dQ.$$

Die Integration über sämtliche Punkte Q des Flügels ergibt, nach Kürzung des Faktors $e^{i\nu t}$, die folgende Integralgleichung für die Amplitudenverteilung $y(P)$ des ohne äussere Kräfte und ohne Dämpfung schwingenden Flügels:

$$y(P) = \nu^2 \int \delta(P, Q) m(Q) y(Q) dQ. \quad (8)$$

Die Berücksichtigung der Materialdämpfung, wie sie in der Einleitung erwähnt wurde, erfordert die Multiplikation der Einflussfunktion mit der komplexen Zahl $(1 - i g)$. Damit lautet dann die Integralgleichung

$$y(P) = \nu^2 (1 - i g) \int \delta(P, Q) m(Q) y(Q) dQ. \quad (9)$$

Die äusseren Erregerkräfte liefern noch ein zusätzliches Glied zu dieser Integralgleichung; sie erzeugen nämlich im Punkte P die Deformationsamplitude

$$\sum_{j=1}^n \delta(P, Q_j) K_j \quad \text{im Falle ohne Dämpfung,}$$

$$(1 - i g) \sum_{j=1}^n \delta(P, Q_j) K_j \quad \text{im Falle mit Dämpfung,}$$

welche zu der von den Trägheitskräften erzeugten Deformationsamplitude addiert werden muss, um die totale Deformationsamplitude zu erhalten. Wenn wir nur den Fall mit Dämpfung ins Auge fassen, so lautet die (jetzt inhomogene) Integralgleichung:

$$y(P) = \nu^2 (1 - i g) \int \delta(P, Q) m(Q) y(Q) dQ + (1 - i g) \sum_{j=1}^n \delta(P, Q_j) K_j. \quad (10)$$

Alle drei Integralgleichungen (8), (9) und (10) haben den Kern $\delta(P, Q) m(Q)$, der nicht symmetrisch ist. Formuliert man sie aber für die in Gleichung (3) definierte Funktion $\varphi(P)$, so lauten sie im Falle der freien Schwingung unter Berücksichtigung der Bezeichnung (4):

$$\varphi(P) = \lambda \int K(P, Q) \varphi(Q) dQ, \quad (11)$$

wobei

$$\lambda = \begin{cases} \nu^2 & \text{im Falle ohne Dämpfung,} \\ \nu^2 (1 - i g) & \text{im Falle mit Dämpfung} \end{cases} \quad (12)$$

und im Falle der erzwungenen Schwingung mit Dämpfung wegen (6) und (5):

$$\varphi(P) - \lambda \int K(P, Q) \varphi(Q) dQ = f(P), \quad (13)$$

wobei

$$\lambda = \nu^2 (1 - i g). \quad (14)$$

Der Kern $K(P, Q)$ dieser Gleichungen ist symmetrisch, weil die Einflussfunktion $\delta(P, Q)$ symmetrisch ist (Satz von MAXWELL). Ausserdem ist er sogar positiv definit, was, kurz ausgedrückt, daraus folgt, dass man beim Aufbringen irgendeiner Belastung auf den vorher unbelasteten Flügel immer eine positive Formänderungsarbeit leisten muss.

Über solche lineare Integralgleichungen zweiter Art existiert eine ganze Menge von Sätzen [4]. So ist zum Beispiel die homogene Gleichung (11) nur lösbar für gewisse Werte von λ , die sogenannten Eigenwerte. Diese sind wegen der Symmetrie des Kernes $K(P, Q)$ reell, und weil er positiv definit ist, sogar positiv. Sie seien, der Grösse nach geordnet, bezeichnet mit

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$$

Zu jedem Eigenwert λ_i gehört als Lösung der homogenen Gleichung eine reelle Eigenfunktion $\varphi_i(P)$. (Den für einen Flugzeugflügel wenig wahrscheinlichen Fall mehrfacher Eigenwerte wollen wir hier übergehen.) Es sei noch erwähnt, dass die Eigenfunktionen zueinander orthogonal sind und dass man sie als normiert voraussetzen kann, also

$$\int \varphi_i(P) \varphi_k(P) dP = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \neq k. \end{cases} \quad (15)$$

Weil die Eigenwerte λ_k reell und positiv sind, folgt die anschauliche Tatsache, dass

- im Falle der freien Schwingung ohne Dämpfung die Grössen $\nu_k = \sqrt{\lambda_k}$ reell sind, die Schwingung also rein sinusförmig ist;
- im Falle der freien Schwingung mit Dämpfung wegen (12) ν_k nicht reell, sondern komplex ist:

$$\nu_k = \sqrt{\frac{\lambda_k}{1 - i g}} = \sqrt{\lambda_k} \left(1 + i \frac{g}{2} \right). \quad (16)$$

Für den Bewegungsablauf hat man daher wegen (1):

$$e^{i \nu_k t} = e^{i \sqrt{\lambda_k} t} e^{-\frac{g}{2} \sqrt{\lambda_k} t},$$

das heisst, die Schwingung ist gedämpft, wie es ja sein muss.

Weil ferner mit der Eigenfunktion $\varphi_k(P)$ auch die Funktion $y_k(P)$ reell ist, folgt, dass bei einer Eigenschwingung der ganze Flügel mit derselben Phase schwingt.

Das Wesen des Standschwingungsversuches erfordert es, die Lösung der inhomogenen Gleichung (13) zu den Lösungen der homogenen Gleichung in

Beziehung zu bringen. Wir ziehen deshalb die bekannte Schmidtsche Reihe für die Lösung $\varphi(P)$ von (13) heran:

$$\varphi(P) = f(P) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(P), \quad (17)$$

wobei

$$f_k = \int f(P) \varphi_k(P) dP. \quad (18)$$

Weil λ bei Anwesenheit von Dämpfung nach (14) komplex ist, werden die Nenner $\lambda_k - \lambda$ nie Null, entsprechend der bekannten Tatsache, dass die Resonanzamplitude bei Materialdämpfung endlich bleibt. Die Gleichung (17) lässt sich noch vereinfachen, wenn man $f(P)$ und f_k durch die Eigenfunktionen und Eigenwerte ausdrückt. Dies wird dadurch ermöglicht, dass man in der Formel (6) die nach dem Satz von MERCER gleichmässig konvergente Entwicklung

$$K(P, Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(P) \varphi_k(Q)}{\lambda_k}$$

einsetzt. Die Integration in Gleichung (18) ist dann gliedweise gestattet, und die Formel (15) kann angewendet werden. Damit ergibt sich aus (17) schliesslich die gleichmässig konvergente Reihe:

$$\varphi(P) = (1 - i g) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(P), \quad (19)$$

wobei

$$a_k = \sum_{j=1}^n k_j \varphi_k(Q_j)$$

oder, indem man $\lambda_k = v_k^2$ setzt und die Formeln (14) und (3) und (5) berücksichtigt:

$$\gamma(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(v_k^2 - v^2) + i g v_k^2} \gamma_k(P), \quad (20)$$

wobei

$$a_k = \sum_{j=1}^n K_j \gamma_k(Q_j).$$

Hierbei wird $\gamma_k(P)$ durch die aus (15) folgende Bedingung

$$\int [\gamma_k(P)]^2 m(P) dP = 1 \quad (21)$$

normiert und mit der Dimension $L^{1/2} K^{-1/2} T^{-1}$ behaftet.

Die Formel (20) sagt aus, dass bei Erregung des Flügels mit sinusförmigen Kräften gleicher Frequenz und gleicher Phase im allgemeinen sämtliche Eigenschwingungen (im eingeschwungenen Zustand) im Schwingungsbild des Flügels vertreten sind, und zwar mit verschiedener Phase. Allerdings wird, wenn die Erregerfrequenz ν gerade gleich einer Erregerfrequenz ν_m ist, der Koeffizient des zugehörigen $\gamma_m(P)$ wegen der Kleinheit von g bedeutend grösser als die andern Koeffizienten, so dass dann im allgemeinen die betreffende Eigenschwingung vorherrscht. Es kann jedoch unter Umständen passieren, dass der Koeffizient a_m viel kleiner ist als die anderen Koeffizienten a_k , ($k \neq m$), so dass die Eigenschwingung $\gamma_m(P)$ doch nicht richtig zur Geltung kommt. Ausserdem werden die Knotenlinien einer vorherrschenden Eigenschwingung durch die andern Eigenschwingungen verwischt. Es lohnt sich deshalb, die Möglichkeit der Elimination unerwünschter Eigenschwingungen zu untersuchen.

4. Erregung einer reinen Eigenschwingung

Zunächst wollen wir beweisen, dass, wenn der erregte Flügel in jedem Punkte mit derselben Phase schwingt, eine reine Eigenschwingung vorliegt. Aus Formel (19) und (14) folgt wegen $\lambda_k = \nu_k^2$:

$$\varphi(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(\nu_k^2 - \nu^2) + i g \nu_k^2} \varphi_k(P). \quad (22)$$

Das nach Voraussetzung von P unabhängige Argument der komplexen Zahl $\varphi(P)$ sei mit α bezeichnet. Dann gilt:

$$\operatorname{Im}[\varphi(P)] - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{Re}[\varphi(P)] = 0,$$

also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k [\nu_k^2 g + (\nu_k^2 - \nu^2) \operatorname{tg} \alpha]}{(\nu_k^2 - \nu^2)^2 + g^2 \nu_k^4} \varphi_k(P) \equiv 0. \quad (23)$$

Die Koeffizienten von $\varphi_k(P)$ in dieser unendlichen Reihe sind von P unabhängig. Weil die Reihe (22) gleichmässig konvergent ist, ist es auch die Reihe (23). Infolgedessen darf man sie, auch nach Multiplikation mit der stetigen Funktion $\varphi_i(P)$, gliedweise integrieren. Dies ergibt unter Berücksichtigung von (15):

$$a_i [\nu_i^2 g + (\nu_i^2 - \nu^2) \operatorname{tg} \alpha] = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \dots$$

Der zweite Faktor kann bei festem ν und α höchstens für ein i verschwinden (sagen wir für $i = m$), und zwar auch dann nur, wenn die Bedingung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{g \nu_m^2}{\nu^2 - \nu_m^2} \quad (24)$$

für die Phase α erfüllt ist. Somit hat man

$$a_i = 0 \quad \text{für } i \neq m, \quad (25)$$

und die Reihe (20) degeneriert zu einem einzigen Gliede:

$$y(P) = \frac{a_m y_m(P)}{(v_m^2 - v^2) + i g v_m^2} = - \frac{a_m e^{i\alpha} \sin \alpha}{g v_m^2} y_m(P),$$

das heisst, der Flügel schwingt in einer einzigen Eigenschwingung; was zu beweisen war.

Obwohl man theoretisch mit endlich vielen Erregern nicht unendlich viele Eigenschwingungen eliminieren kann, ist es doch in der Praxis möglich, reine Eigenschwingungen zu erhalten. Denn beim Standschwingungsversuch interessiert man sich nur für die untersten paar Eigenschwingungen, so dass man bei der Erregerfrequenz nie über eine gewisse Schranke hinausgehen wird. Aus der Konvergenz der Reihe (20) folgt dann, dass von einer gewissen, genügend hohen Ordnung an keine Eigenschwingung mehr stören wird.

Mit n Erregern kann man mindestens $n - 1$ Eigenschwingungen eliminieren, denn man hat die Bedingungen $a_k = 0$ für $k \neq m$, welche ausgeschrieben folgendermassen lauten:

$$K_1 y_{11} + K_2 y_{12} + \cdots + K_n y_{1n} = 0,$$

$$K_1 y_{21} + K_2 y_{22} + \cdots + K_n y_{2n} = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$K_1 y_{m-1,1} + K_2 y_{m-1,2} + \cdots + K_n y_{m-1,n} = 0,$$

$$K_1 y_{m+1,1} + K_2 y_{m+1,2} + \cdots + K_n y_{m+1,n} = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$K_1 y_{n1} + K_2 y_{n2} + \cdots + K_n y_{nn} = 0,$$

$$K_1 y_{n+1,1} + K_2 y_{n+1,2} + \cdots + K_n y_{n+1,n} = 0,$$

wobei $y_k(Q_j) = y_{kj}$ gesetzt wurde. Setzt man zunächst einmal Q_j als gegeben voraus, so hat man ein lineares homogenes Gleichungssystem für die Unbekannten K_1, K_2, \dots, K_n . Nach den Regeln der Theorie der linearen homogenen Gleichungssysteme existiert eine bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Lösung (K_1, \dots, K_n) , welche mindestens $n - 1$ der obigen Gleichungen befriedigt. Dies bedeutet, dass man bei festgehaltenen Erregerstellen Q_j durch geeignete Wahl der Kraftamplituden K_1, \dots, K_n mindestens $n - 1$ Eigenschwingungen eliminieren kann.

Hat aber das Gleichungssystem der ersten $n - 1$ Gleichungen einen Rang [— Rang der Matrix $Y = (y_{ki})$], der kleiner als $n - 1$ ist, so lassen sich weitere Gleichungen erfüllen. Dadurch werden dann mehr als $n - 1$ Eigenschwingungen eliminiert. Eine Verkleinerung des Ranges lässt sich aber immer durch geeignete Wahl der Erregerstellen Q_j erreichen, zum Beispiel dadurch, dass man sämtliche Q_j in die Knotenlinie einer Eigenschwingung legt; dann wird diese Eigenschwingung von selbst eliminiert. Um diese Tatsache auszunützen, wird man also die Erregerstellen in die Schnittpunkte von Knotenlinien verschiedener unerwünschter Eigenschwingungen legen.

Es leuchtet deshalb ein, dass man mit wenigen Erregern praktisch genügend reine Eigenschwingungen erzielen kann, wenn man sowohl die Grösse der Kraftamplituden als auch die Angriffspunkte der Erreger variiert.

Abschliessend sei noch der Fall einer stetigen Verteilung der Erregerkräfte angeführt, der dann von Interesse ist, wenn man den Aufwand sehr vieler Erreger nicht scheut. Dabei werden wir auf eine andere Methode zur Herstellung reiner Eigenschwingungen geführt, welche praktisch schon verwirklicht worden ist [5].

Die Erregerkraft pro Flächeneinheit sei bezeichnet mit $K(Q)$, und entsprechend zu Formel (5) sei

$$k(Q) = \frac{K(Q)}{\sqrt{m(Q)}}. \quad (5a)$$

Formel (6) geht dann über in

$$f(P) = (1 - i g) \int K(P, Q) k(Q) dQ \quad (6a)$$

und Formel (7) in

$$a_k = \int k(Q) \varphi_k(Q) dQ = \int K(Q) y_k(Q) dQ. \quad (7a)$$

Deshalb lautet die Bedingung (25) für die Erregung einer reinen Eigenschwingung, dass $k(Q)$ zu allen $\varphi_k(Q)$ orthogonal sein muss ausser zu $\varphi_m(Q)$. Nimmt man daher

$$k(Q) \text{ proportional zu } \varphi_m(Q), \quad (26)$$

so ist $a_k = 0$ für $k \neq m$. Aus (26) folgt wegen (5a) und (3):

$$K(Q) \text{ proportional zu } y_m(Q) m(Q) \quad (27)$$

als Bedingung dafür, dass nur die m -te Eigenschwingung erregt wird [6].

Gehen wir wieder zu dem praktisch allein realisierbaren Fall endlich vieler (aber sehr vieler) Erreger über, so wird näherungsweise dann nur die m -te Eigenschwingung erregt, wenn

$$\frac{K_j}{m(Q_j) y_m(Q_j)} \text{ unabhängig von } j \quad (28)$$

ist. Dazu sei erwähnt, dass LEWIS und WRISLEY [5], die offenbar durch praktische Erfahrungen mehr gefühlsmässig auf die Bedingung (28) gekommen sind, eine Apparatur entwickelt haben, die für jeden Erreger eine zur Verschiebungsamplitude $y(Q_j)$ proportionale Kraftamplitude K_j liefert. Es lassen sich damit die reinen Eigenschwingungen beinahe automatisch herstellen. Ausserdem erübrigt sich das Verschieben der Angriffspunkte Q_j wegen der Vielzahl der Erreger.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. COURANT und D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Band 1, 2. Aufl., Kapitel V, § 6 (Springer, Berlin 1931).
- [2] B. VON SCHLIPPE, *Die innere Dämpfung, Berechnungsansätze*, Ingenieurarchiv 6, 127 (1935).
- [3] N. O. MYKLESTAD, *The Concept of Complex Damping*, J. appl. Mech. 19, 3 (September 1952).
- [4] Siehe zum Beispiel [1], Kapitel III.
- [5] R. C. LEWIS und D. L. WRISLEY, *A System for the Excitation of Pure Natural Modes of Complex Structures*, J. aeron. Sci. 17, 705–722 (November 1950).
- [6] K. BORKMANN, *Einführung der Baugrössen eines Flugzeuges in dessen Flatterberechnung*, Jahrbuch 1941 der deutschen Luftfahrtforschung, S. 544.

Summary

The steady-state response of airplane wings due to externally applied sinusoidal shaker forces is theoretically examined by means of the theory of linear integral equations of the second kind. Damping is accounted for, and emphasis is laid on the problem of exciting pure natural modes. The following items are proved:

- (1) Equal phase at every point of the vibrating wing is shown to be a criterion for the presence of a pure natural mode.
- (2) n shakers allow to eliminate at least $n - 1$ natural modes by variation of the exciting amplitudes. By displacing the shakers still more natural modes can be eliminated.

The experimental method of LEWIS and WRISLEY is based on the application of a considerable number of shakers. However, according to (2) it is possible to excite sufficiently pure natural modes with relatively few shakers.

(Eingegangen: 26. Februar 1954.)

On Stresses of an Isotropic Elastic Disc in the Form of a Cardioid Rotating Steadily in its Plane

By DEBENDRANATH MITRA, Kharagpur¹⁾

1. Summary: Two dimensional problems of elasticity have been solved by STEVENSON²⁾, by expressing the stresses and displacements in terms of two complex potential functions. Cases of disc in the form of a circle and of an ellipse rotating steadily have also been solved by him. In this paper the method of MUSKHELISHVILI³⁾ has been adopted and the equations giving the stress-functions have been transformed into integral equations by means of the mapping function which represents conformally the region included by the boundary of the disc on a circle. The stress functions are then determined by solving the above integral equations using function-theory. The case for a cardioid is solved as an example.

2. A disc is rotating steadily about the origin and the problem is treated as one of plain strain. Let D , denote the displacement and Θ , Φ the stress combinations be expressed as

$$D = u + i v, \quad (2.1)$$

$$\Theta = \widehat{x} \widehat{x} + \widehat{y} \widehat{y}, \quad (2.2)$$

$$\Phi = \widehat{x} \widehat{x} - \widehat{y} \widehat{y} + 2 i \widehat{x} \widehat{y}. \quad (2.3)$$

From the stress-strain relations it is deduced,

$$(1 - 2 \eta) \Theta = 2 \mu \left(\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} \right), \quad (2.4)$$

$$\Phi = 4 \mu \frac{\partial D}{\partial \bar{z}}, \quad (2.5)$$

where

$$\eta = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)},$$

the bar placed over a function, denoting the conjugate of the function. Θ , Φ are easily expressed in terms of $\Omega'(z)$, $\omega'(z)$ which are analytic functions of z only,

$$2 \Theta = \Omega'(z) + \bar{\Omega}(\bar{z}) + (4 - \gamma) \varrho \frac{\partial W}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$- 2 \Phi = z \bar{\Omega}''(\bar{z}) - \bar{\omega}''(\bar{z}) - \gamma \varrho \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \quad (2.7)$$

where $\partial W(z, \bar{z})/\partial z$ is the body force and γ , the elastic constant is given by $\gamma = 2(1 - 2\eta)/(1 - \eta)$ and dashes over a function indicate derivatives with respect to the argument of the function.

¹⁾ Indian Institute of Technology.

²⁾ A. C. STEVENSON, Phil. Mag. 34, 766-793 (1943).

³⁾ N. I. MUSKHELISHVILI, ZAMM. 13, 264 (1933).

Denoting the directions of the tangent and the normal at a point on the bounding curve of the disc by n, s respectively we get using (2.6) and (2.7)

$$4 \left(\widehat{n} \widehat{n} + i \widehat{n} \widehat{s} - \varrho \frac{\partial W}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \{ \Omega(z) + z \bar{\Omega}'(\bar{z}) + \bar{\omega}'(\bar{z}) - \gamma \varrho W \}. \quad (2.8)$$

If the angular velocity of the rotating disc be ν ,

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\nu^2 z \bar{z}}{2}, \quad \text{or} \quad W = -\frac{\nu^2 z \bar{z}}{4}. \quad (2.9)$$

Also since the boundary of the rotating disc is unstressed, $\widehat{n} \widehat{n} = \widehat{s} \widehat{s} = 0$, and from (2.8) the boundary condition in the form given by STEVENSON¹⁾ is obtained

$$\Omega(z) + z \bar{\Omega}'(\bar{z}) + \bar{\omega}'(\bar{z}) - \gamma \varrho W = 2 \varrho \nu^2 \int z \bar{z} dz. \quad (2.10)$$

3. We now adopt MUSKHELISHVILI's²⁾ method. Let the mapping function which represents conformally the region bounded by the boundary of the disc on the unit circle be

$$z = m(\zeta). \quad (3.1)$$

Putting $\Omega(z) = \Omega\{m(\zeta)\} = \Omega(\zeta)$ and $\bar{\zeta} = 1/\zeta$ on the unit circle, from (2.10) we have on the unit circle,

$$\left. \begin{aligned} \Omega(\zeta) + \frac{m(\zeta) \bar{\Omega}'(\bar{\zeta})}{\bar{m}'(\bar{\zeta})} + \frac{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})}{\bar{m}'(\bar{\zeta})} &= \gamma \varrho W(\zeta, \bar{\zeta}) + 2 \varrho \nu^2 \int m(\zeta) \bar{m}(\bar{\zeta}) m'(\zeta) d\zeta \\ &= F(\zeta) \quad \text{say.} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

The functions $\Omega(\zeta)$, $\omega(\zeta)$ can be determined by evaluating the two following integral equations obtained by multiplying (3.2) and its conjugate by

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma}$$

and integrating on the circumference, c of the unit circle.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_c \Omega(\zeta) \bar{m}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{(\zeta - \sigma)} + \frac{1}{2\pi i} \int_c m(\zeta) \bar{\Omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{(\zeta - \sigma)} \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_c \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{(\zeta - \sigma)} = \frac{1}{2\pi i} \int_c F(\zeta) \bar{m}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{(\zeta - \sigma)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_c \bar{\Omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) m'(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - \sigma)} + \frac{1}{2\pi i} \int_c \bar{m}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Omega'(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - \sigma)} \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_c \omega'(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - \sigma)} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \bar{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) m'(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - \sigma)} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

where σ is any point within the unit circle.

¹⁾ A. C. STEVENSON, Phil. Mag. **34**, 766-793 (1943).

²⁾ N. I. MUSKHELISHVILI, ZAMM. **13**, 264 (1933).

4. As an example, we work out the case for a steadily rotating disc in the form of a cardioid. The formula transforming the cardioid on the unit circle is

$$z = m(\zeta) = -a(1 - \zeta)^2, \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} F(\zeta) = & -\frac{1}{4} \gamma r^2 z^2 \bar{z} + 2 \varrho r^2 \int z \bar{z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta = \frac{1}{4} \gamma \varrho r^2 a^3 \frac{(\zeta - 1)^6}{\zeta^2} \\ & - 4 \varrho r^2 a^3 \left(\frac{1}{4} \zeta^4 - \frac{5}{3} \zeta^3 + 5 \zeta^2 - 10 \zeta + \frac{1}{\zeta} + 5 \log \zeta \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2 \pi i} \int_c F(\zeta) \bar{m}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{(\zeta - \sigma)} \\ = & -2 \varrho r^2 a^4 \left[-\frac{\gamma}{4} (\sigma^4 - 7 \sigma^3 + 21 \sigma^2 - 35 \sigma + 35) \right. \\ & \left. + 4 \left\{ \frac{1}{4} \sigma^4 - \frac{23}{12} \sigma^3 + \frac{20}{3} \sigma^2 - 15 \sigma + 10 - 5 \frac{(1 - \sigma)}{\sigma} \log(1 + \sigma) \right\} \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{2 \pi i} \int \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} = a c_0 \quad [\text{the constant term in } \omega'(\zeta)]. \quad (4.4)$$

On the assumption of the $\Omega(\zeta)$ in the form of a power series,

$$\Omega(\zeta) = a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + \dots \quad (4.5)$$

when the constants are to be determined,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2 \pi i} \int_c \Omega(\zeta) m'(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} + \frac{1}{2 \pi i} \int_c \bar{\Omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) m(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} \\ = & -2 a \Omega(\sigma) \frac{1 - \sigma}{\sigma} - a \{ a_1 (\sigma - 1)^2 + 2 a_2 (\sigma - 2) + 3 a_3 \}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

The equation (3.3) with (4.3)–(4.6) gives

$$\left. \begin{aligned} \Omega(\sigma) = & -\frac{\sigma}{2} \left\{ a_1 (1 - \sigma) - 2 a_2 - \frac{2 a_2 - 3 a_3}{1 - \sigma} \right\} + \frac{c_0 \sigma}{2 (1 - \sigma)} \\ & + \varrho r^2 a^3 \frac{\{ - (1/4) \gamma (\sigma^5 - 7 \sigma^4 + 21 \sigma^3 - 35 \sigma^2 + 35 \sigma) \}}{(1 - \sigma)} \\ & + \frac{\sigma^5 - (23/3) \sigma^4 + (80/3) \sigma^3 - 60 \sigma^2 + 40 \sigma + 20 (\sigma - 1) \log(1 + \sigma)}{(1 - \sigma)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Since $\Omega'(0) = a_1$, $\Omega''(0) = a_2$, $\Omega'''(0) = a_3$, we have from (4.7),

$$\left. \begin{aligned} 3 a_1 - 4 a_2 + 3 a_3 = & c_0 + 2 \varrho r^2 a^3 \left(-\frac{35}{4} \gamma + 20 \right), \\ a_1 + a_2 - 3 a_3 = & -c_0 + 20 \varrho r^2 a^3, \\ 6 a_2 - 10 a_3 = & -3 c_0 + \frac{63}{2} \varrho r^2 a^3 \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

The equation (3.4) is evaluated and the following results obtained,

$$\frac{1}{2 \pi i} \int_c \bar{\Omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) m'(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} = -2 a a_1, \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \Omega'(\zeta) \bar{m}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} = -a \left[\frac{(1 - \sigma)^2 \Omega'(\sigma)}{\sigma^2} - \frac{a_1 + 2a_2\sigma}{\sigma^2} + \frac{2a_1}{\sigma} \right], \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \omega'(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} = \omega'(\sigma), \quad (4.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_c \bar{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) m'(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} = -2a \left[\frac{1}{4} \gamma \varrho r^2 a^3 (\sigma^3 - 7\sigma^2 + 21\sigma - 35) \right. \\ \left. - 4\varrho r^2 a^3 \{\sigma^2 - \sigma - 5 + 5(1 - \sigma) \log(1 + \sigma)\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

(3.4) with (4.9) – (4.12) gives

$$\left. \begin{aligned} \omega'(\sigma) = 2a a_1 + a \left\{ \frac{(1 - \sigma)^2 \Omega'(\sigma)}{\sigma^2} - \frac{a_1 + 2a_2\sigma}{\sigma^2} + \frac{2a_1}{\sigma} \right\} \\ - 2a \varrho r^2 a^3 \left[\frac{\gamma}{4} (\sigma^3 - 7\sigma^2 + 21\sigma - 35) \right. \\ \left. - 4\sigma^2 + 4\sigma + 20 - 20(1 - \sigma) \log(1 + \sigma) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Putting $\sigma = 0$ in (4.13) we get

$$3a_3 - 4a_2 + 3a_1 = c_0 + 2\varrho r^2 a^3 \left(-\frac{35}{4} \gamma + 20 \right). \quad (4.14)$$

The values of the constants are now obtained from (4.8) and (4.14)

$$\left. \begin{aligned} c_0 = 0, \quad a_1 = \varrho r^2 a^3 \left(\frac{-240 + 287\gamma}{4} \right), \\ a_2 = \varrho r^2 a^3 \left(\frac{-200 + 203\gamma}{2} \right), \quad a_3 = \varrho r^2 a^3 \left(\frac{-120 + 231\gamma}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Hence (4.7), (4.13) together with (4.15) give $\Omega(\sigma)$, $\omega'(\sigma)$. The hoop stress on the boundary given by

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\Omega'(\sigma)}{m'(\sigma)} + \frac{\Omega'(1/\sigma)}{\bar{m}'(1/\sigma)} \right\}$$

is then easily calculated from (4.7).

The author has also worked out the case of an inverse of an ellipse by the above method.

Zusammenfassung

Die zweidimensionalen Elastizitätsprobleme wurden von STEVENSON (1943) gelöst, indem er die Spannungen und Verschiebungen durch zwei komplexe Potentialfunktionen ausdrückte. In der vorliegenden Arbeit wurde die Methode von MUSKHELISHVILI angewendet, um die Gleichungen, welche die Spannungsfunktionen liefern, als gleichwertige Integralgleichungen darzustellen. Hierzu muss die Formel, welche den vom Umfang einer Scheibe eingeschlossenen Bereich auf einem Kreis konform abbildet, bekannt sein. Die Spannungsfunktionen sind dann durch die Lösung der obigen Integralgleichungen mittels der Funktionentheorie festgelegt. Der Fall des Kardioids ist als Beispiel gelöst.

(Received: September 29, 1954.)

Hydrodynamisches Modell zur Darstellung von Diffusionsvorgängen mit konzentrationsabhängigen Diffusionskoeffizienten

VON WERNER KNAPPE, Darmstadt¹⁾

Bei der mathematischen Behandlung von Diffusionsvorgängen geht man im allgemeinen vom I. Fickschen Gesetz aus:

$$\mathfrak{S} = -D \operatorname{grad} c, \quad (1)$$

\mathfrak{S} = Diffusionsstromdichte ($\text{g cm}^{-2} \text{s}^{-1}$),

c = Konzentration (g cm^{-3}),

D = Diffusionskoeffizient ($\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$),

Hieraus folgt durch Bildung von $\operatorname{div} \mathfrak{S}$.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathfrak{S} = \operatorname{div} \mathfrak{S} (D \operatorname{grad} c), \quad (2)$$

t = Zeit (s).

Nur im Sonderfall eines konstanten Diffusionskoeffizienten ergibt sich das sogenannte II. Ficksche Gesetz

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \operatorname{div} \operatorname{grad} c = D \Delta c. \quad (3)$$

Während zu (3) zahlreiche Lösungen bekannt sind, gestaltet sich die Anwendung der nichtlinearen partiellen D -Gleichung (2) schwierig. Für den Sonderfall eines beiderseitig unendlich ausgedehnten Systems ist eine exakte Lösung nach BOLTZMANN²⁾ möglich. Bei anderen Rand- und Anfangsbedingungen ist man auf Näherungsverfahren³⁾ angewiesen. Die damit verbundene erhebliche Rechenarbeit legt es nahe, nach physikalischen Modellen zu suchen, in welchen dem Diffusionsvorgang analoge Prozesse ablaufen. Hierbei liefert die der Konzentration entsprechende Messgrösse die gesuchten Zahlenwerte. Modelle dieser Art sind schon mit Erfolg zur Behandlung von mathematischen Problemen in der Technik eingesetzt worden⁴⁾. So lassen sich zum Beispiel instationäre Wärmeleitungsvorgänge mit Hilfe einer Kette von elektrischen Widerständen und Kondensatoren darstellen, wobei die Spannung der Temperatur entspricht. Ein im Aufbau ähnliches Modell auf hydrodynamischer Grundlage ist von A. D. MOORE⁵⁾ angegeben und von A. DOBROWSKY zum Lösen axialsymmetrischer instationärer Diffusionsprobleme benutzt worden⁶⁾.

Zylindrische Behälter Z aus Glas (Querschnitt = F) werden durch Kapillaren K zu einer Kette miteinander verbunden (siehe Figur 1). In einem solchen System entspricht der Flüssigkeitsstand h der Konzentration. Die Analogie zum I. Fickschen Gesetz ist gegeben durch das Hagen-Poiseullesche Gesetz, welches den Zu-

¹⁾ Deutsches Kunststoff-Institut an der Technischen Hochschule.

²⁾ L. BOLTZMANN, Ann. Phys. Chem. 53, 959 (1894).

³⁾ J. CRANK und M. E. HENRY, Trans. Far. Soc. 45, 636 (1949).

⁴⁾ F. BRUCKMAYER, Allg. Wärmetechn. 4, 79 (1953) u. a.

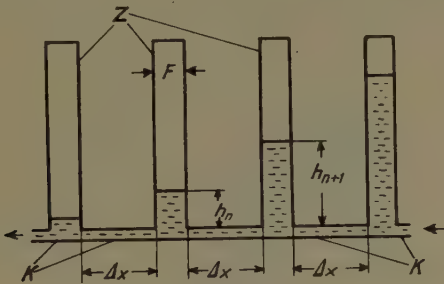
⁵⁾ A. D. MOORE, Ind. Eng. Chem. 28, 704 (1936).

⁶⁾ A. DOBROWSKY, Kolloidz. 126, 1 (1952).

bzw. Abfluss zu den einzelnen Behältern regelt

$$\dot{Q}_n = \frac{\Delta p \pi r^4}{\Delta x 8 \eta} = \frac{(h_{n+1} - h_n) \varrho g \pi r^4}{\Delta x 8 \eta} = C \Delta h_n. \tag{4}$$

\dot{Q}_n = Flüssigkeitsvolumen, welches pro Zeiteinheit in den n -ten Behälter Z einströmt ($\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$),
 p = hydrostatischer Druck ($\text{gs}^{-2} \text{cm}^{-1}$),
 r = Radius der Kapillaren K (cm),
 η = Viskosität der strömenden Flüssigkeit ($\text{gs}^{-1} \text{cm}^{-1}$).



Figur 1

Skizze des hydrodynamischen Modells für konstanten Diffusionskoeffizienten.

Die Änderung des Flüssigkeitsstandes h in den einzelnen Behältern ergibt sich zu

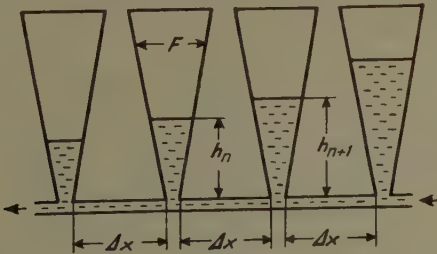
$$\frac{\partial h_n}{\partial t} = \frac{1}{F} (\dot{Q}_n - \dot{Q}_{n-1}) = \frac{C}{F} \{ \Delta h_n - \Delta h_{n-1} \} = \frac{C'}{F} \cdot \frac{\Delta^2 h_n}{\Delta x^2} \approx D^* \frac{\partial^2 h_n}{\partial x^2}. \tag{5}$$

Gleichung (5) stellt also das II. Ficksche Gesetz in Differenzenform für den linearen Fall dar. Das Modell liefert demnach Näherungslösungen zu (3).

Ersetzt man die zylindrischen Behälter durch solche, deren Querschnitt F von der Höhe h abhängt $F = F(h)$ (siehe Figur 2), so geht (5) über in

$$\frac{\partial h_n}{\partial t} = \frac{C'}{F(h)} \cdot \frac{\Delta^2 h_n}{\Delta x^2} \approx D^*(h) \frac{\partial^2 h_n}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Das Modell arbeitet also mit einem von der Höhe h des Flüssigkeitsstandes und damit von der Konzentration abhängigen Diffusionskoeffizienten.



Figur 2

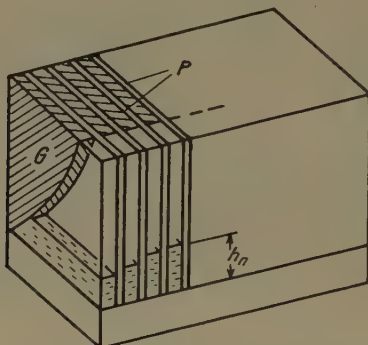
Skizze des hydrodynamischen Modells für konzentrationsabhängigen Diffusionskoeffizienten.

Für den linearen Fall erhält man aus Gleichung (2) allerdings einen von (6) abweichenden Ausdruck, nämlich

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(c) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial D}{\partial c} \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)^2. \quad (7)$$

Es lässt sich aber zeigen, dass bei kleinen Konzentrationsunterschieden (Übergang zur Differenzenform und $\Delta c \rightarrow 0$) das 2. Glied auf der rechten Seite rascher gegen 0 geht als das erste. Wir können schreiben

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D(c) \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \text{für} \quad \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \rightarrow 0. \quad (8)$$



Figur 3

Aufbauskeizze für eine praktische Ausführung.

Die Annäherung an (2) wird also mit fortschreitender Unterteilung der Kette und damit kleineren Höhendifferenzen zwischen den Flüssigkeitsspiegeln der einzelnen Behälter besser. Unerwünscht hohe Differenzen treten zwangsläufig zu Beginn eines Diffusionsvorgangs auf. Um Fehler zu vermeiden, verfährt man am besten so, dass man die Konzentrationsverteilung für das erste Stadium des Diffusionsvorgangs nach der Methode von BOLTZMANN¹⁾ berechnet und die exakten Werte als Anfangswerte für das Modell verwendet.

Ein Modell in der angegebenen Art lässt sich im Prinzip folgendermassen herstellen (Figur 3): Man unterteilt einen rechteckigen Trog durch Einbringen zahlreicher senkrecht stehender Platten P in viele gleich grosse schmale Zellen. Durch Einlegen einer entsprechend $F = F(h)$ geschnittenen Folie G in jede dieser Zellen lässt sich das Modell dem jeweiligen Problem anpassen.

Summary

It is possible, to get approximate solutions of the differential equation for non-stationary diffusion (FICKS 2nd law) by means of a hydrodynamic model, consisting of cylindric containers connected by capillary tubes. Solutions with a diffusion coefficient dependent of concentration may be obtained by taking containers with a cross section variable with the height. Some proposals for the design of such a model are made.

(Eingegangen: 30. September 1954.)

Eine Bemerkung zur Mitteilung von H. Wundt: «Über eine Funktionalgleichung aus der Wärmeleitung¹⁾»

Von MIKLOS HOSSZU in Miskolc²⁾ (Ungarn)

Herr H. WUNDT behauptet in der oben stehenden Arbeit, dass die Funktion

$$f(x) = A \int_1^x \frac{\ln t + 1/t - 1}{t - \ln t - 1} dt + B \quad (7)$$

eine Lösung der Funktionalgleichung

$$f(z) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad z = \frac{x - y}{\ln x/y}, \quad (1)$$

ist. Er hat aber nicht näher untersucht, ob (7) die Gleichung (1) auch wirklich befriedigt.

Wir werden zeigen, dass die Funktionalgleichung (1) keine andere derivierbare Lösung als die triviale $f(x) = c$ (const) hat. Wir bilden die partiellen Ableitungen der Gleichung (1) nach x bzw. y :

$$f'(z) z_x = \frac{1}{2} f'(x) \quad \text{bzw.} \quad f'(z) z_y = \frac{1}{2} f'(y).$$

Dies gibt eine notwendige Bedingung³⁾ für die Existenz einer nichttrivialen Lösung der Funktionalgleichung (1):

$$D(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \frac{z_x}{z_y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\ln f'(x) - \ln f'(y)] = 0.$$

Wenn $z = (x - y)/(\ln x/y)$ ist, wird diese Bedingung nicht erfüllt. Um dieses zu zeigen, bilden wir

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{\ln x/y - 1/x (x - y)}{-\ln x/y + 1/y (x - y)},$$

und weiter

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{z_x}{z_y} = \frac{1/x - y/x^2}{-\ln x/y - 1 + y/x} - \frac{-1/x + 1/y}{-\ln x/y + x/y - 1},$$

und

$$D(x, y) = \frac{-1/x^2 (\ln x/y - 1 + y/x) - (1/x - y/x^2) (-1/y + 1/x)}{(\ln x/y - 1 + y/x)^2} - \frac{-1/y^2 (-\ln x/y + x/y - 1) - (-1/x + 1/y) (1/y - x/y^2)}{(-\ln x/y + x/y - 1)^2}.$$

¹⁾ Erschienen in der ZAMP 5, 172–175 (1954).

²⁾ Mathematisches Institut der Technischen Universität.

³⁾ P. SAINT ROBERT, *De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante*, Mem. R. Accad. Torino (2) 25, 53–72 (1871).

Setzt man zum Beispiel $x = 1$, $y = 1/e$, dann wird

$$\begin{aligned} D(1, 1/e) &= \frac{-1/e - (1 - 1/e)(-e + 1)}{(1/e)^2} - \frac{-e^2(-1 + e - 1) - (-1 + e)(e - e^2)}{(-1 + e - 1)^2} \\ &= \frac{(e - 2)^2[-e - e(e - 1)(1 - e)] + e[e^2 - 2e + (e - 1)(1 - e)]}{(e - 2)^2} \\ &= \frac{e}{(e - 2)^2} [(e - 2)^2(e^2 - 2e) - 1] = \frac{e}{(e - 2)^2} [e(e - 2)^3 - 1] \\ &= \frac{e}{(e - 2)^2} P_4(e) \neq 0, \end{aligned}$$

da e transzendent ist, also keine algebraische Gleichung [wie $P_4(e) = 0$] befriedigen kann.

Da die Konstante $f(x) = c$ (1) befriedigt, ist sie die einzige differenzierbare Lösung von (1).

Summary

This paper shows, in connection with H. WUNDT's paper: *Über eine Funktionalgleichung aus der Wärmeleitung* [ZAMP 5, 172-175 (1954)], that the only differentiable solution of the functional equation

$$2f\left(\frac{x-y}{\ln x/y}\right) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

is the trivial $f(x) = \text{constant}$, and thus H. WUNDT's solution

$$f(x) = A \int_1^x \frac{\ln t + 1/t - 1}{t - \ln t - 1} dt + B$$

with $A \neq 0$ does not satisfy (1).

Bemerkung zur obigen Mitteilung von Herrn M. Hosszu

Herr Hosszu hat mit Recht festgestellt, dass die von H. WUNDT vorgelegte Funktion

$$z = \frac{x - y}{\ln x - \ln y} \quad (1)$$

nicht durch ein Leiternomogramm mit drei geradlinigen Leitern dargestellt werden kann. Herr Hosszu zeigte zu diesem Zweck, dass (1) die Saint-Robertsche Differentialgleichung nicht erfüllt, was man natürlich auch einsehen kann, ohne die Transzendenz von e zu bemühen. Es mag von Interesse sein, anzugeben, wie das Leiternomogramm von (1) wirklich aussieht. Bezeichnet man mit ξ , η rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, so lauten die drei Skalen des Nomogramms

$$x\text{-Skala} \quad \xi = \frac{1}{\ln x}, \quad \eta = \frac{x}{\ln x}, \quad (2)$$

$$y\text{-Skala} \quad \xi = \frac{1}{\ln y}, \quad \eta = \frac{y}{\ln y}, \quad (3)$$

$$z\text{-Skala} \quad \xi = 0, \quad \eta = z. \quad (4)$$

Man bemerkt, dass die ersten beiden Skalen zusammenfallen und dass die z -Skala geradlinig ist. Die Bedingung, dass die drei Punkte (2) (3) (4) auf einer Geraden liegen, ist in der Tat identisch mit der vorgegebenen Beziehung (1).

Die Behauptung von Herrn Hosszu lässt sich nun ohne jede Rechnung aus folgendem Satz der Gewebetheorie herleiten:

«Ein Leiternomogramm kann nur dann in ein Nomogramm mit drei *geraden* Leitern verwandelt werden, wenn die drei Leitern Stücke ein- und derselben (eventuell zerfallenden) Kurve 3. Grades sind.» Da die Skala (2) transzendent ist, kann also (1) nicht durch drei geradlinige Leitern nomographiert werden.

E. STIEFEL

(Eingegangen: 19. Oktober 1954.)

Kleine Bemerkung zur asymptotischen Entwicklung des Fehlerintegrals

VON PETER HENRICI, Washington, D.C.¹⁾

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Mitteilung [6]²⁾ gibt J. ZBORNIK eine asymptotische Entwicklung für ein Integral, das auf die Form

$$\varphi(z) = \int_z^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt \quad (|\arg z| \leq \pi)$$

gebracht werden kann und daher nahe mit dem Komplement des Fehlerintegrals verwandt ist³⁾. Im Hinblick auf einige Ungenauigkeiten in [6] sind vielleicht einige ergänzende Angaben am Platze.

1. Durch einfache Variabelntransformation, Entwicklung des Binoms und gliedweise Integration findet man unmittelbar das bekannte, mit demjenigen von [6] identische Resultat

$$\varphi(z) = \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{-s} \left(1 + \frac{s}{z}\right)^{-1/2} ds \sim \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \sum_{n=0}^\infty \frac{(1/2)_n}{(-z)^n},$$

wo

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} + n - 1\right)$$

gesetzt ist. Der asymptotische Charakter der Reihe folgt dabei zum Beispiel aus dem bekannten Watsonschen Lemma (vgl. [5], S. 236), nicht aber natürlich wie bei [6] durch den blossen Nachweis, dass das Restglied für $z \rightarrow \infty$ gegen Null strebt.

2. Auch der in [6] der Fehlerabschätzung zugrunde gelegte Satz («In asymptotischen Reihen kann der Betrag des Restgliedes den des letzten Gliedes der Reihe

¹⁾ American University.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 146.

³⁾ Das Integral war bei einer Untersuchung von H. HÖSLI über den Einfluss des Windes auf Raketenbahnen aufgetreten.

nicht übersteigen») ist unrichtig¹⁾. Die numerische Abschätzung des Restes erfordert in den meisten Fällen eine besondere Untersuchung. Im vorliegenden Falle lässt sich, wie hier ohne Beweis kurz mitgeteilt werden soll, folgendes zeigen: Es ist

$$\varphi(z) = \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1/2)_k}{(-z)^k} + \theta \frac{(1/2)_n}{(-z)^n} \right\}$$

mit

$$\theta = \int_0^{\infty} e^{-s} \left(1 + \frac{s}{z} \right)^{-n-(1/2)} ds;$$

man findet, $z = r e^{i\vartheta}$ gesetzt, für $|\vartheta| \leq (\pi/2)$

$$|\theta| \leq 1, \quad \text{sign}(\arg \theta) = \text{sign} \vartheta, \quad |\arg \theta| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Die angegebenen Schranken sind, jede für sich (aber nicht notwendig beide gleichzeitig), exakt. Um einen möglichst guten Wert für $\varphi(z)$ zu erhalten, wird man also das letzte berücksichtigte Glied der asymptotischen Reihe mit $(1 + i \text{sign} \vartheta)/2$ multiplizieren; der Fehler ist dann absolut kleiner als das so modifizierte Glied²⁾.

3. Andere numerisch wertvolle Verfahren zur Berechnung des Fehlerintegrals wurden von SCHLÖMILCH [4] (Kettenbruch) und LAIBLE [2] angegeben. Eine Tafel für komplexe Werte von z ist von CLEMMOW und MUNDFOED [1] berechnet worden.

LITERATURANGABEN

- [1] P. C. CLEMMOW and C. M. MUNDFOED, Phil. Trans. Roy. Soc. London [A] 245, 189–212 (1952–1953).
- [2] T. LAIBLE, Z. angew. Math. Physik 2, 484–486 (1951).
- [3] F. LÖSCH und F. SCHÖBLIK, *Die Fakultät* (Leipzig 1951).
- [4] O. SCHLÖMILCH, Z. Math. Phys. 16, 261–262 (1871).
- [5] G. N. WATSON, *Bessel Functions*, 2nd ed. (Cambridge 1944).
- [6] J. ZBORNIK, Z. angew. Math. Phys. 5, 345–351 (1954).

(Eingegangen: 6. Januar 1955.)

Internationales Symposium über elektrische Entladungen in Gasen

Vom 25. bis 30. April 1955 wird in Delft (Technische Hochschule), Niederlande, ein internationales Symposium über elektrische Entladungen in Gasen stattfinden. Die Mittel für die Durchführung dieser Veranstaltung werden einerseits im Rahmen der Unesco von der Union Internationale de Physique Pure et Appliquée, andererseits von der Technischen Hochschule Delft und von den Philips-Werken, Eindhoven, aufgebracht.

Die folgenden Hauptthemen sollen diskutiert werden:

1. Fundamental-Prozesse; neue Ansichten über die Gasentladungsmechanismen.

¹⁾ Ein besonders drastisches Gegenbeispiel ist die identisch verschwindende asymptotische Entwicklung von e^{-x} für $x \rightarrow \infty$.

²⁾ Das hieraus für reelle Werte von z ($\vartheta = 0$) ergebende Resultat ist wohlbekannt. Für komplexe z leistet unsere Abschätzung im betrachteten Winkelbereich mehr als diejenige in [3], S. 129f.

2. Instabilitäten, Stabilitätsbedingungen und Plasmaschwingungen.
3. Zündspannung als Funktion von p.d. und Frequenz.
4. a) Moderne Messmethoden, angewendet auf Gasentladungsuntersuchungen.
b) Anwendung der Gasentladung zu Messzwecken in anderen Gebieten.
5. Bogenentladungen.
6. Funken.
7. Verschiedenes (Geiger-Müller-Röhren, Ionenquellen).

Bereits haben sich die folgenden Referenten zu einem Hauptvortrag bereit erklärt:

Prof. H. S. W. MASSEY, London: «Fundamental Primary Processes in Gas Discharges.»

Prof. L. B. LOEB, Berkeley: «Field Measurements in Glow Discharges with a Refined Electron Beam Probe and Automatic Recording.»

Ir CHR. VAN GEEL, Delft: «On the Internal Selfinduction of Gas Discharges.»

Prof. S. C. BROWN, Cambridge, Mass.: «Breakdown in Gases at Microwave Frequencies.»

Dr. M. A. BIONDI, East Pittsburgh Pa.: «Microwave and Optical Techniques for Gas Discharges.»

Prof. W. LOCHTE-HOLTGREVEN, Kiel: «Bogenentladungen.»

Prof. J. M. MEEK, Liverpool: «Spark Discharges.»

Die zugelassenen Sprachen des Symposiums sind Französisch, Deutsch und Englisch; in der Diskussion ist Englisch bevorzugt.

Zwei Tage sind reserviert worden für Exkursionen. Für die Damen der Symposiumsteilnehmer ist ein spezielles Programm vorgesehen.

Für Auskünfte über das Symposium wende man sich an den Sekretär des Symposiumsausschusses Ir A. W. VAN WAGENSVELD, Mijnbouwplein 11, Delft, Niederlande.

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Gas Turbine Analysis and Practice. By BURGESS H. JENNINGS and WILLARD L. ROGERS (McGraw-Hill Publ. Co., Ltd., London, 1953). 475 pp., 200 Fig.; 64 s.

Das Buch gibt zunächst einen kurzen geschichtlichen Rückblick auf die Entwicklung der Gasturbine und geht gleichzeitig auf ihre Wirkungsweise ein. Es folgen Abschnitte über die thermodynamischen Grundlagen im allgemeinen (insbesondere über die Eigenschaften der Luft), die Prozessführung der Gasturbine und die Theorie der Turbinen und Verdichter. Im beschreibenden Teil sind sowohl Flugtriebwerke als auch Gasturbinen für andere Zwecke behandelt. Es folgen weitere Kapitel über Verbrennung und Brennkammer, Festigkeitsprobleme, Schwingungsprobleme und metallurgische Fragen.

Der allgemeine Charakter des Buches ist elementar. Trotzdem könnte die thermodynamische Einleitung mehr in die Tiefe gehen. Unmodern und geradezu primitiv ist die Behandlung der Turbinen- und Verdichtertheorie. Der beschreibende Teil ist sowohl für die Flugtriebwerke als auch für die stationären und Fahrzeuggasturbinen knapp gefasst, wogegen der Problemkomplex «Brennstoff, Verbrennung, Brennkammer» eine für ein elementares Buch recht ausführliche Behandlung erfährt. Allerdings lässt die Art der Betrachtung dieser Fragen erkennen, dass vom Standpunkt des Flugtriebwerkbauers ausgegangen wird. So kommt das heute für den übrigen Gasturbinenbau so wichtige Problem der

Schwerölverbrennung, das mit den Stichworten Vanadium, Natrium, Schwefel angedeutet werden kann, vollständig zu kurz.

Die heute bekannten Lehrbücher des Gasturbinenbaues befriedigen zumeist nicht, und dies gilt auch von demjenigen von JENNINGS und ROGERS. Man muss allerdings berücksichtigen, dass der amerikanische Autor von anderen Gegebenheiten ausgehen muss als etwa der kontinentaleuropäische. Er muss Spezialkenntnisse vermitteln, ohne die gleiche allgemeine Schulung voraussetzen zu können wie bei uns. Dies ist dem vorliegenden Buch deutlich anzumerken. Auf eine nicht zu unterschätzende Qualität sei übrigens noch hingewiesen. Das Buch enthält namentlich in den Abschnitten über Thermodynamik und Verbrennung eine Fülle wertvoller Daten in Tabellen zusammengefasst (im englischen Maßsystem), die man sonst unter Umständen mühsam zusammensuchen müsste. *W. Traupel*

Lexikon der Physik. Herausgegeben von H. FRANKE (Franck'sche Verlagshandlung, Stuttgart, 1950). 2 Bände, 720 und 828 S., mit 1263 graphischen Darstellungen und 232 Tafelbildern; I. Bd. DM 72.—, II. Bd. DM 82.—.

Es ist leider richtig, wenn im Vorwort des in angemessener Aufmachung erschienenen, in zwei Bände aufgeteilten Lexikons der Physik vermerkt wird, dass die beträchtliche Ausweitung, die das Gebiet der Physik erfahren hat, notgedrungen zu einer starken Spezialisierung führen musste. Damit hat sich für Physiker und Ingenieure das Bedürfnis nach einem Nachschlagewerk eingestellt, das ihnen erlaubt, sich schnell und trotzdem zuverlässig über Belange benachbarter Wissensgebiete zu informieren. Diesem Ziele kommt das vorliegende Lexikon in erfreulicher Weise nahe.

Das Werk behandelt rund 14 000 Gegenstände. Auswahl, Bezeichnung und Umfang der Erörterungen sind unvermeidlicherweise eine Ermessensfrage. Jedenfalls war es aber richtig, grundsätzlich auf eine Schilderung der Messverfahren und Versuchseinrichtungen zu verzichten, um so den Umfang des Werkes in erträglichen Grenzen zu halten; die Hinweise auf die einschlägige Literatur genügen und sind äusserst wertvoll.

Unter den Gegenständen finden sich auch Angaben über das Leben der markantesten Forscherpersönlichkeiten der Physik. Der Rezensent vermisst darunter Namen wie BLOCH, VON KÁRMÁN, insbesondere APPLETON. Doch ist es zugegebenermassen schwer, die Grenzen einer vernünftigen Auswahl zu finden. Auch sei vermerkt, dass die Begründung für die Erteilung des Nobelpreises an EINSTEIN unrichtig ist; ebenso die Aussage, dass zum Beispiel DEBYE zwei Nobelpreise (Physik und Chemie) zuerkannt wurden. Diese Beanstandungen sind aber sicherlich von ganz untergeordneter Bedeutung gegenüber dem grossen Vorteil und Dienst, den das Lexikon der Physik jedem Interessenten zu erweisen vermag.

R. Sängner

Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. Von U. GRAF und H. J. HENNING (Verlag Springer, Berlin 1953). 102 S.; DM. 9.—.

Gut überlegte, rezeptmässige Zusammenstellung der wesentlichen Formeln, Tabellen und Nomogramme für den Gebrauch der wichtigsten statistischen Methoden und Tests in der Praxis. Die Formeln sind ohne Beweise dargestellt, hingegen werden Beispiele formuliert und diskutiert. Das Büchlein enthält auch die Grundlagen für Stichprobenpläne und Kontrollkarten.

Die Formelsammlung ist für Forscher und Ingenieure mit den nötigen theoretischen Kenntnissen in der mathematischen Statistik ein wertvolles technisches Hilfsmittel, numerische Ergebnisse statistisch zu werten und zu analysieren.

W. Saxer

Einführung in die Mikrowellen-Elektronik. Band 16 der «Monographien der elektronischen Nachrichtentechnik». Von W. KLEEN. (S. Hirzel Verlag, Zürich 1952). 300 S., 129 Abb.; sFr. 30.—.

Angesichts der sehr raschen Entwicklung der Hochfrequenztechnik und der Elektronik, namentlich im Bereiche höchster Frequenzen, wo sich diese beiden Gebiete aufs innigste durchdringen, besteht ein grosses Bedürfnis nach zusammenfassenden Werken, welche kurz, klar und doch mit einer gewissen Vollständigkeit und Gründlichkeit die jüngsten Fortschritte zur Darstellung bringen. Diesem Ziele gerecht zu werden, ist W. KLEEN in seiner *Einführung in die Mikrowellen-Elektronik* aufs schönste gelungen.

Aus dem sehr weitverzweigten Stoff die richtige Auswahl zu treffen und denselben in einem systematischen Aufbau übersichtlich zu gliedern, bedeutet eine mühsame Aufgabe, die in vorbildlicher Weise gelöst ist. Eine kurze Aufzählung der Kapitel möge eine Vorstellung von dem reichen Inhalt vermitteln: 1. Die Systeme der Mikrowellen-Elektronik; 2. Elektronenbewegung in statischen Feldern; 3. Leistungsaustausch zwischen Elektronenströmungen und elektrischen Wechselfeldern; 4. Ströme in Mikrowellen-Röhren; 5. Geschwindigkeitsmodulation in stehenden Feldern; 6. Phasenfokussierung in von Hochfrequenz freien Räumen als ballistisches Problem; 7. Leistungsauskopplung aus stehenden Feldern; 8. Raumladungssteuerung; 9. Phasenausortierung; 10. Steuerung von Elektronenströmungen durch fortschreitende Wellen bei Abwesenheit statischer Querfelder; 11. Phasenfokussierung und freie Raumladungswellen; 12. Wechselwirkung zwischen Elektronenströmungen und fortschreitenden Wellen in gekreuzten statischen Feldern; 13. Systematik der Mikrowellenröhren; 14. Technische Bedeutung und Anwendung von Mikrowellenröhren; 15. Die Röhre in der Schaltung; 16. Rauschen; 17. Schwingungskreise; 18. Verzögerungsleitungen; 19. Elektronenkanonen.

Der Raum verbietet leider, auf Einzelheiten einzugehen. Die Darstellung ist knapp, aber fasslich gehalten. Gewisse mathematische und theoretische Grundlagen, über welche der Nachrichteningenieur verfügen soll, müssen selbstverständlich vorausgesetzt werden. Künftigen Auflagen würden wir die Verwendung des Giorgi-Maßsystems empfehlen. Hervorgehoben seien die vielen aufschlussreichen Figuren; willkommen ist die jedem Kapitel am Schluss beigegebene Literaturübersicht. Die Ausstattung des Buches ist ausgezeichnet. Möge es viele Leser finden.

F. Tank

Experimental Nuclear Physics. Vol. I. By SEGRÉ (J. Wiley, Inc., New York, 1953). 780 pp.; \$15.00.

Dieses Buch stellt den ersten Band einer Handbuchfolge dar, in welcher eine zusammenhängende Darstellung unserer gegenwärtigen Kenntnisse auf dem Gebiete der Kernphysik vom experimentellen Standpunkt versucht wird. Der vorliegende erste Band enthält fünf Beiträge aus verschiedenen, in sich abgeschlossenen Arbeitsgebieten. Titel und Autoren dieser Monographien sind folgende:

1. Nachweismethoden (H. H. STAUB, 165 S.);
2. Durchgang von Strahlung durch Materie (H. A. BETHE und J. ASHKIN, 191 S.);
3. Kernmomente und Statistik (N. F. RAMSEY, 109 S.);
4. Zweikörperprobleme und Elemente der Kernstruktur (N. F. RAMSAY, 90 S.);
5. Dynamik und Optik geladener Teilchen, Isotopenhäufigkeit und Atommassen (K. T. BAINBRIDGE, 207 S.).

1. Der Aufsatz über Nachweismethoden behandelt die Grundprinzipien der verschiedenen Zählertypen, soweit sie Gaszähler und Ionisationskammern be-

treffen, ferner die zur Verstärkung der primären Impulse benötigten elektronischen Schaltungen. Er gibt einen vorzüglichen, knappen Überblick über den gegenwärtigen Stand der experimentellen Technik auf diesem Gebiet. Die allerneueste Entwicklung, die vor allem durch das Aufkommen der Szintillationszähler und Detektoren für Cerenkov-Strahlung gekennzeichnet ist, findet allerdings keine Berücksichtigung mehr, sie soll wahrscheinlich einem der folgenden Bände vorbehalten bleiben.

2. Eine ausgezeichnete Zusammenfassung bietet der Artikel über die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie. Er behandelt vor allem das Problem der Energieverluste geladener Teilchen und elektromagnetischer Strahlung, und zwar in einer für die Praxis des Experimentators sehr geeigneten Form. Zahlreiche Tabellen und Kurven kommen den praktischen Bedürfnissen des auf diesem Gebiete Arbeitenden entgegen.

3. Die Monographie über Kernmomente und Statistik füllt eine Lücke in der bestehenden Literatur. Sie enthält unter anderem sehr gut brauchbare Zusammenstellungen aller wichtigen experimentellen Daten auf diesem in rascher Entwicklung begriffenen Arbeitsgebiet.

4. Auch der zweite Aufsatz des gleichen Autors, welcher das kernphysikalische Zweikörperproblem zum Gegenstand hat, bietet eine sehr klare Übersicht des experimentellen Materials und seiner gegenwärtigen theoretischen Erklärungsversuche. Es ist allerdings zu bemerken, dass dieses Thema auch schon in anderen zusammenfassenden Darstellungen eine erschöpfende Bearbeitung gefunden hat.

5. Der letzte Artikel (BAINBRIDGE) schildert in souveräner Weise die gesamte technische Entwicklung wie auch die Theorie der Massenspektroskopie, von ihren Anfängen bis in die jüngste Zeit. Auch diese Abhandlung enthält zahlreiche, für den Praktiker unentbehrliche Zusammenstellungen der in der Originalliteratur verstreuten experimentellen massenspektroskopischen Daten.

Dieses Sammelwerk ist seiner ganzen Anlage nach für den vorgerückten, zu selbständiger Forschungsarbeit befähigten Leser bestimmt, es wird einem solchen sehr gute Dienste leisten.

H. Wäffler

Physikalische Grundlagen der Messtechnik in der Wärmewirtschaft.

Von S. VALENTINER. (Verlag für angewandte Wissenschaften, Wiesbaden 1953). 48 Fig., 150 S.; 2. veränderte und erweiterte Auflage, Leinen, DM 12.80, broschiert DM 8.80.

In vielen technischen Betrieben besteht die dringende Aufgabe, Energie in Form von Wärme möglichst vollständig zu nutzen, um so den Betrieb wirtschaftlich zu gestalten. Dies erfordert zuerst eine genaue Kenntnis der Energiebeträge, die bei den vorkommenden thermodynamischen Prozessen umgesetzt werden, und insbesondere der Wärmemengen, die dabei ungenutzt verlorengehen. Hierfür ist meist die Durchführung zuverlässiger Messungen notwendig, deren physikalische Grundlagen zuvor bekannt sein sollten.

Die physikalischen Grundlagen wärmetechnischer Messungen in gedrängter, für den Ingenieur leicht verständlicher Form zu vermitteln, ist der Zweck des vorliegenden Bändchens. Es ist aus Vorlesungen des Verfassers an der Bergakademie Clausthal hervorgegangen. Dementsprechend ist die Auswahl des behandelten Stoffes besonders im Hinblick auf den Hüttenbetrieb getroffen worden, dem auch die angeführten Beispiele zur Hauptsache entstammen. Der Inhalt des Buches ist in fünf Abschnitte gegliedert; ihre Überschriften lauten: Temperaturmessung; spezifische Wärme und Wärmeübergang; Das Verhalten der Gase und Dämpfe; Strömen von Gasen und Dämpfen, Mengenmessung; Feuerungstechnik.

Im ersten Abschnitt wird vor allem die Messung hoher Temperaturen behandelt. Mit Recht werden die physikalischen Grundlagen der verschiedenen Arten von Strahlungspyrometern besonders ausführlich dargelegt. Dabei wird auch auf die häufig entstehenden Messfehler und die zu ihrer Verhütung notwendigen Massnahmen hingewiesen. Im zweiten Kapitel werden die Gesetzmässigkeiten des Wärmeüberganges leider allzu kurz behandelt. Die Wärmeübertragung ist doch für alle wärmetechnischen Probleme von so zentraler Bedeutung, dass eine gründliche Kenntnis ihrer Grundgesetze unerlässlich scheint. Sehr summarisch werden in den beiden folgenden Abschnitten auch die allgemeinen thermodynamischen Eigenschaften von Gasen und Dämpfen erörtert; eine Ausnahme bildet die etwas umständliche Behandlung feuchter Gase. Das letzte Kapitel über Feuerungstechnik dagegen vermag wieder eher zu befriedigen; es bringt interessante Hinweise über den Ablauf der Verbrennung in technischen Öfen.

Durch das Reproduktionsverfahren bedingt, konnten in der zweiten Auflage des Bändchens zwar Änderungen gegenüber der ersten im Text berücksichtigt werden; alle Neuzusätze dagegen mussten in einen Anhang verwiesen werden, was die Übersichtlichkeit der Darstellung beeinträchtigt. Druck und Ausstattung des Buches sind im übrigen vorzüglich.

Wenn auch noch manche Wünsche bezüglich Auswahl des Stoffes und tiefergehender Behandlung wichtiger Teilgebiete offenbleiben, so darf doch erwartet werden, dass das Buch den in der Wärmewirtschaft tätigen Ingenieuren von erheblichem Nutzen sein wird.

K. Elsev

Die konfluente hypergeometrische Funktion. Von H. BUCHHOLZ (Springer-Verlag, Berlin 1953). 234 S., 9 Abb.; DM 36.-.

Das vorliegende Buch ist erschienen als Band 2 der von F. LÖSCH herausgegebenen Reihe «Ergebnisse der angewandten Mathematik». Es ist sehr zu begrüßen, dass H. BUCHHOLZ es unternommen hat, die wichtigsten Eigenschaften der konfluenten hypergeometrischen Funktion darzustellen. Die Funktion tritt bei zahlreichen Problemen der Physik und der Mechanik, insbesondere auch bei der durch Separation erzielbaren Lösung der Wellengleichung in parabolischen Koordinaten auf, und, was ebenso wichtig ist, sie enthält als Spezialfälle eine grosse Zahl von häufig vorkommenden transzendenten und elementaren Funktionen. Sie ist definiert als Lösung der Whittakerschen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die in bekannter Weise aus der Gaußschen Differentialgleichung durch Konfluenz der Nullstellen $z = 1$ und $z = \infty$ entsteht und neben der Variablen noch zwei Parameter aufweist und mit der Kummerschen Funktion ${}_1F_1(\alpha; \beta; z)$ zusammenhängt. Von der ursprünglichen Whittakerschen Definition weicht BUCHHOLZ ab durch die in vielen Fällen zweckmässige Ersetzung des hintern Parameters μ durch $\mu/2$ und durch Hinzufügung des Faktors $1/\Gamma(1 + \mu)$, was einmal zu einer einfacheren Schreibweise führt und die Funktion ausserdem zu einer ganzen transzendenten Funktion auch im Parameter μ macht.

Die Kenntnis der konfluenten hypergeometrischen (oder parabolischen) Funktion ist in den vergangenen Jahren besonders durch Arbeiten von A. ERDELYI, C. S. MEIJER, F. TRICOMI und andern entscheidend gefördert worden, so dass eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse durchaus wünschenswert geworden ist. Über die dargestellten Beziehungen gibt wohl am besten eine Inhaltsübersicht Auskunft, und diese lässt gleichzeitig erkennen, was im Buche nicht behandelt wurde. Die einzelnen Abschnitte sind: I. Die Differentialgleichung der konfluenten hypergeometrischen Funktion in ihren verschiedenen Formen und die Definitionen der sie lösenden Funktionen. II. Allgemeine Integraldarstellungen für

die parabolischen Funktionen selbst und ihre Produkte. III. Die Asymptotik der parabolischen Funktionen. IV. Unbestimmte und bestimmte Integrale mit parabolischen Funktionen und einige unendliche Reihen. V. Die den parabolischen Funktionen zugehörigen Polynome und unendliche Reihen mit diesen Polynomen. VI. Die Parameterintegrale in den Beziehungen für die verschiedenen Wellentypen der mathematischen Physik in den parabolischen Koordinaten VII. Nullstellen und Eigenwerte.

In einem ersten Anhang sind die Sonderfälle der konfluenten hypergeometrischen Funktion zusammengestellt und gleichzeitig die wichtigsten Vertafelungen angegeben. Der zweite Anhang besteht in einem sehr umfassenden, sorgfältig zusammengestellten Literaturverzeichnis, das nicht nur die rein mathematischen Arbeiten, sondern auch die Untersuchungen über physikalische, technische und statistische Probleme enthält, die auf die parabolische Funktion führen.

Im ganzen betrachtet, handelt es sich um ein sehr willkommenes Werk, das vor allem dem Physiker und Ingenieur, aber auch dem Mathematiker grosse Dienste leisten wird. Der Druck ist hervorragend, und – was angesichts des Formelreichtums nicht so selbstverständlich ist – die Zahl der Druckfehler ist minimal.

E. Roth-Desmeules

Vorlesungen über die Theorie der Integralgleichungen. Von I. G. PETROWSKI (Physica-Verlag, Würzburg 1953). 100 S.; DM 7.80.

Le lecteur trouvera dans cet ouvrage une exposition concise, mais très claire, de la théorie «classique» des équations intégrales linéaires; il n'y trouvera aucune application aux problèmes aux limites des équations différentielles.

Le chapitre I donne d'abord quelques exemples de problèmes qui conduisent à des équations intégrales; il montre ensuite les analogies entre équations intégrales linéaires et systèmes d'équations algébriques linéaires puis démontre les théorèmes

de FREDHOLM, d'abord dans le cas des noyaux dégénérés $\sum_1^n f_\nu(p) g_\nu(q)$, puis dans celui des noyaux uniformément continus par un passage à la limite. Le chapitre se termine par l'étude des noyaux du type $K(p, q)/\sqrt{pq}$ qui interviennent dans les applications les plus importantes (fonction de GREEN).

Le chapitre II traite des équations intégrales de VOLTERRA.

Le chapitre III expose la théorie d'E. SCHMIDT des équations à noyau symétrique et les développements en séries orthogonales qui en découlent. A y signaler une démonstration intéressante et peu connue de I. M. GELFAND de l'existence d'une valeur fondamentale d'un noyau symétrique.

Deux annexes traitent de la réduction d'une forme quadratique à la forme canonique par une transformation orthogonale et de la théorie des équations intégrales à noyau de carré intégrable au sens de LEBESGUE.

M. Plancherel

Raumkinematische Grundlagen. Von RUDOLF BEYER und ERNST SCHÖRNER (Johann Ambrosius Barth, München 1953). 104 S., 33 Abb.; DM 9.60.

Das Buch stellt eine Einführung in die räumliche Kinematik dar und entwickelt in anschaulicher Weise die Grundlagen der räumlichen Getriebeanalyse. Die Behandlung ist rein graphisch und durch den bemerkenswerten Versuch gekennzeichnet, dem Leser die Raumkonstruktionen durch stereoskopische Bilder nahezubringen. Die einzelnen Abschnitte sind: 1. Vektorielle und zeichnerische Grundlagen der Raummechanik; 2. Zusammensetzung räumlicher Bewegungen; Grundlagen für Analyse und Synthese der Raumgetriebe, 3. Beschleunigungsverhältnisse der Schraubenbewegung.

H. Ziegler

Neuerscheinung

Der Briefwechsel von Johann Bernoulli

Herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel

Band I

532 Seiten, 162 Briefe im Originaltext mit 128 faksimilierten Zeichnungen,
3 Schriftproben und 2 Porträts (1955). In Leinen gebunden Fr. 60.-.
Die Ausgabe kann auf Verlangen auch broschiert geliefert werden.

Das Vorwort des Herausgebers (O. SPIESS) erzählt die Vorgeschichte des Unternehmens, insbesondere die Entdeckung des lange verschollenen Bernoullischen Nachlasses. Daran schliesst sich eine Übersicht über das vorhandene Material und eine Skizze des Editionsplanes. Dieser umfasst ausser den drei oben genannten BERNOULLI noch fünf weitere Träger dieses Namens sowie den einst berühmten JAKOB HERMANN. Die Zahl der Bände wird auf 20 bis 25 geschätzt; davon kommen allein auf JOHANN BERNOULLI 3-4 Bände gesammelte Schriften und 6-8 Bände Korrespondenz.

Der vorliegende erste Band eröffnet die Serie der Korrespondenzen von JOHANN BERNOULLI. Er enthält von Seite 95 an, in drei Gruppen A, B, C gegliedert, 162 meist französische oder lateinische Briefe aus dem Zeitraum 1690-1707. A bringt alles, was noch von JOHANN BERNOULLIS Briefwechsel mit seinem Bruder JAKOB erhalten ist. B enthält die schon lange erwartete Korrespondenz mit dem MARQUIS DE L'HÔPITAL. In der Einleitung dazu wird endgültig der Nachweis erbracht, dass die berühmte «Analyse des infiniment petits» und andere Werke DE L'HÔPITALS fast völlig auf den Unterrichtsbriefen BERNOULLIS beruhen, was der Marquis bis über seinen Tod hinaus zu verschleiern verstanden hatte. Gruppe C endlich ist eine Mischung nichtwissenschaftlicher Briefe von oder an rund zwanzig Personen. Im Anhang folgen noch 6 Verzeichnisse, darunter eine Bibliographie der Druckschriften des MARQUIS DE L'HÔPITAL.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

BIRKHÄUSER VERLAG BASEL



Clichés für Wissenschaftliche Arbeiten
unsere Spezialität

SCHÜTZENMATTSTR. 31

Clichés
STEINER+CO BASEL